UNIDAD **3**

Geometría

Contenidos

1. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.

2. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres planos o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen y utilizan la operatoria básica con vectores en el plano y en el espacio (adición, sustracción y ponderación por un escalar), y relacionan con traslaciones y homotecias de figuras geométricas.

2. Conocen y valoran la capacidad del modelo vectorial para representar fenómenos físicos como desplazamiento y fuerzas.

3. Resuelven problemas relativos al cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.

Orientaciones didácticas

El mundo en el que nos desenvolvemos es tridimensional. Sin embargo, a lo largo de la Educación Media los estudiantes se han visto enfrentados fundamentalmente a situaciones en las que sólo han necesitado desarrollar habilidades geométricas en el plano. Por ello, la intención fundamental de esta unidad es situar al alumno o alumna en el contexto geométrico real tridimensional, entregándole una nueva herramienta de representación del plano y del espacio, como es el modelo vectorial. Este modelo constituye hoy uno de los pilares básicos de la física y de la matemática.

Interesa que los estudiantes desarrollen capacidades de representación de vectores tanto en el plano como en el espacio y que puedan manejar con soltura la operatoria básica que se presenta. A través de la comprensión y utilización de esta operatoria, tendrán las herramientas que les permitirán representar rectas en el plano y el espacio, y también una diversidad de planos contenidos en el espacio.

Metodológicamente, se propone trabajar inicialmente con vectores en el plano, que son fáciles de dibujar e imaginar, para luego extender la representación y la operatoria al espacio. Esto podría invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las posibilidades de extensión a dimensiones mayores que tres.

Con el fin de mantener presente la consistencia interna de la matemática y las fuertes relaciones que existen entre los diferentes tópicos, es importante enfatizar las relaciones entre las respectivas ecuaciones cartesianas y vectoriales de las figuras geométricas. Ello se propone con fuerza en la Actividad 2, con el fin de aprovechar también los conocimientos previos de los estudiantes.

Finalmente, debe enfatizarse la diferencia entre magnitudes escalares y vectoriales. Estas últimas tienen asociada una dirección y un sentido, lo cual permite que los vectores puedan utilizarse para representar traslaciones. Es importante que se distinga entre traslaciones y rotaciones y, más aún, que en este último caso se comprenda que tiene sentido rotar figuras planas en el espacio.

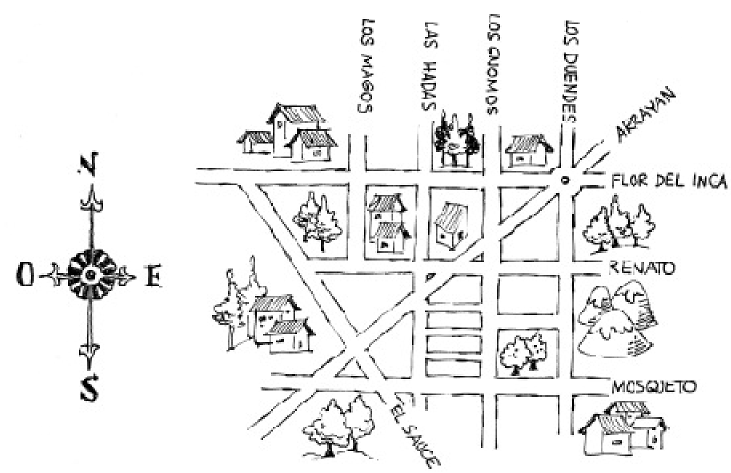
Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Representar vectores en el plano cartesiano, calcular gráfica y algebraicamente sumas y diferencias de vectores; determinar el producto de un escalar por un vector.

Ejemplo A

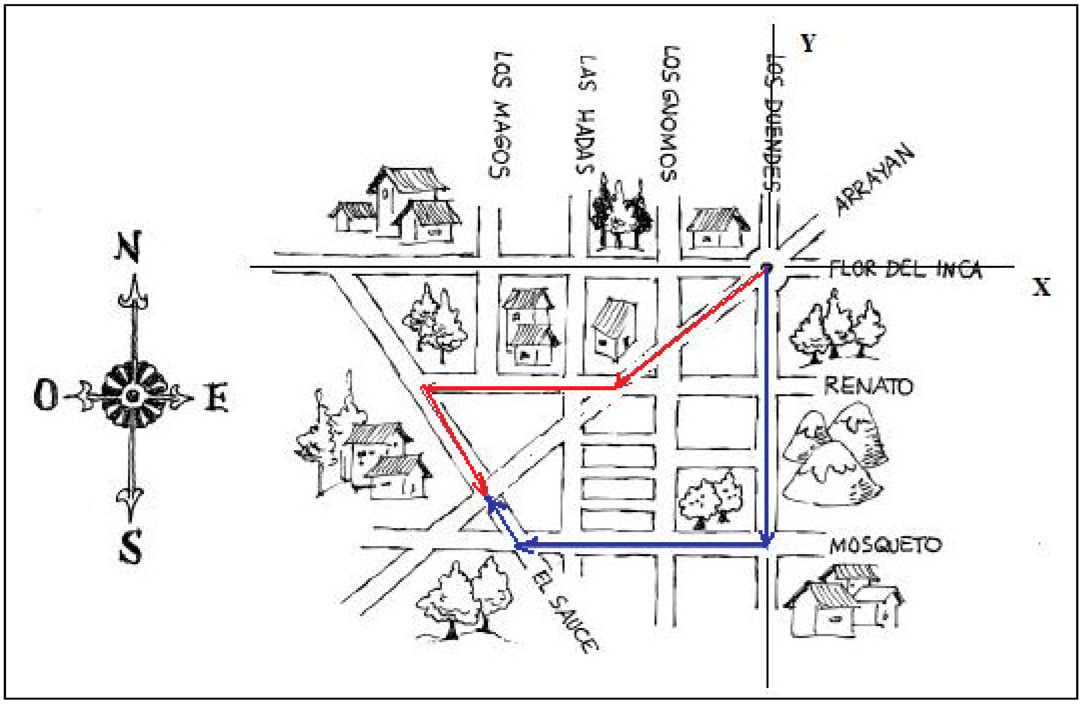
En el mapa siguiente marcar los desplazamientos que han hecho Diego y Cecilia. Ambos partieron desde la plazoleta del Arrayán con Flor del Inca y los Duendes; Diego se fue hacia el sur por los Duendes, dobló hacia el poniente por Mosqueto y subió en dirección noroeste por el Sauce hasta Arrayán. Cecilia en cambio, se fue en dirección suroeste por Arrayán, dobló en Retamo hacia el oeste y al llegar a El Sauce dobló por esta calle hacia el sureste hasta llegar a Flor del Inca, donde ambos amigos se encontraron después de haber hecho algunas diligencias.



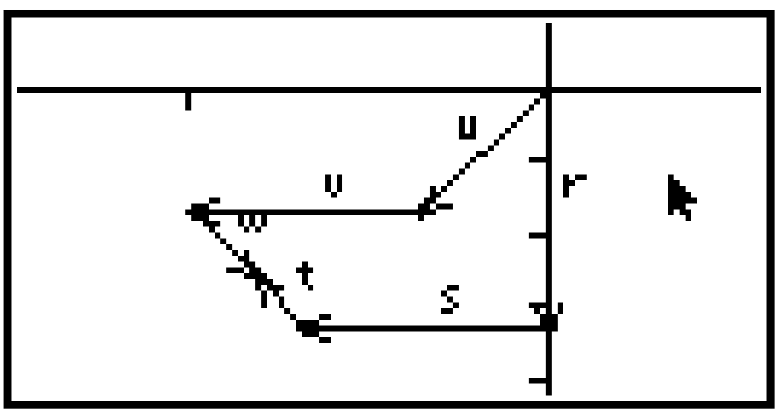
I. Distinguir entre el camino recorrido por uno (la trayectoria) y el desplazamiento entre el punto de partida y el de la llegada final.
II. Codificar los caminos recorridos utilizando un sistema de coordenadas.
III. Codificar otros caminos que cumplan con la condición de tener, aproximadamente, la misma longitud que el de Diego, pero que conducen a otros puntos de llegada.
IV. Establecer diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales.

Solución:

I. Expresar los desplazamientos de las personas como se muestra en la figura siguiente:



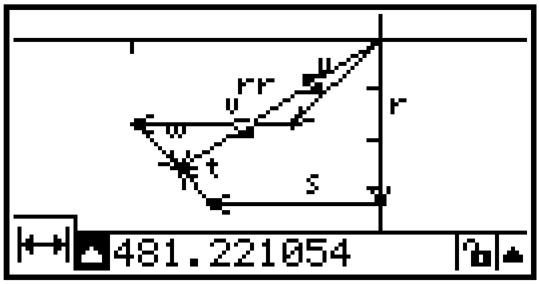
Se pueden representar los desplazamientos, mediante una escala apropiada, como:

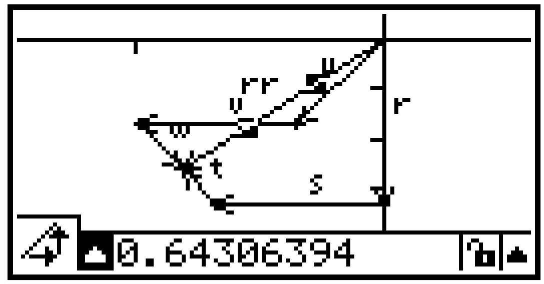


El camino recorrido por Diego es $\|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{s}\| + \|\boldsymbol{t}\|$ y el desplazamiento es $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}$.

El camino recorrido por Cecilia es $\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$ y el desplazamiento es $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$.

Observe que el desplazamiento de ambas personas está dado por el vector $\boldsymbol{rr}$, en el gráfico siguiente:



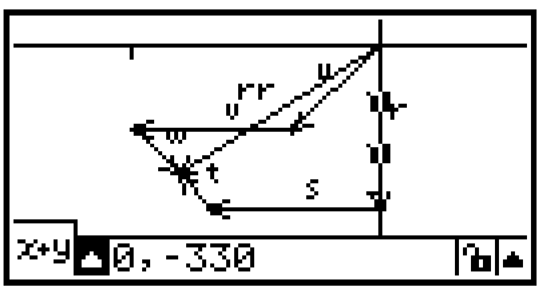


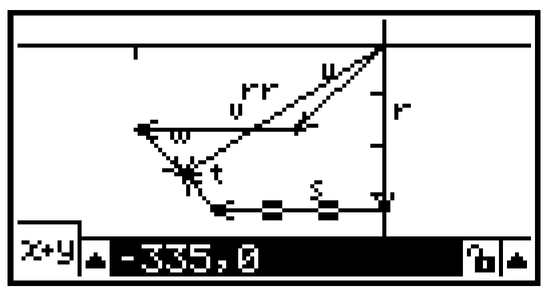
Magnitud y dirección (pendiente) del vector de desplazamiento de ambas personas.

II. Usando el sistema de referencia mostrado tenemos:

$$\boldsymbol{r} = (0, -330), \boldsymbol{s} = (-335{,}0), \boldsymbol{t} = (-69.754{,}69.754), \boldsymbol{u} = (-172.5, -172.5),$$

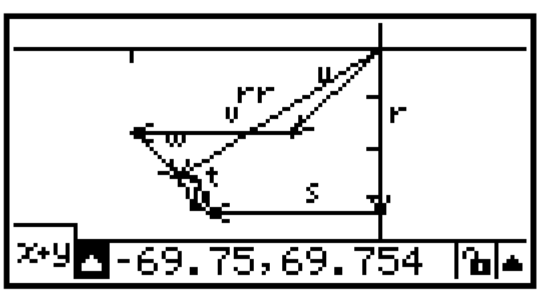
$$\boldsymbol{v} = (-329{,}0),\ \ \boldsymbol{w} = (87.783, -87{,}783)\ \text{ y }\ \boldsymbol{rr} = (-404.7, -260.2).$$

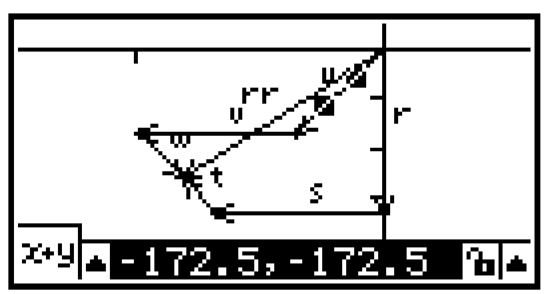




Vector $\boldsymbol{r} = (0, -330)$

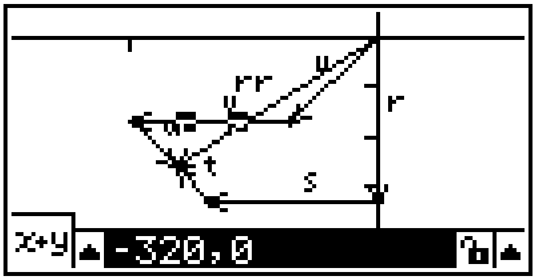
Vector $\boldsymbol{s} = (-335{,}0)$

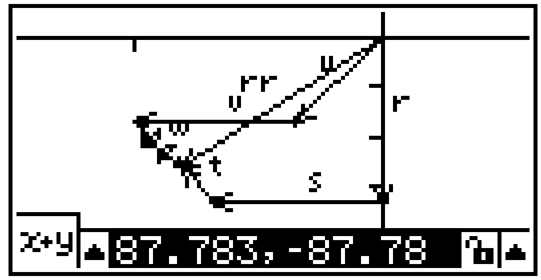




Vector $\boldsymbol{t} = (-69.754{,}69.754)$

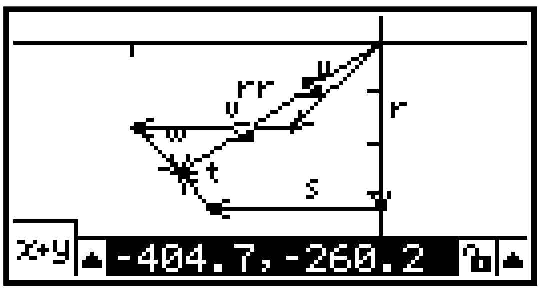
Vector $\boldsymbol{u} = (-172.5, -172.5)$





Vector $\boldsymbol{v} = (-329{,}0)$

Vector $\boldsymbol{w} = (87.783, -87{,}783)$



Vector de desplazamiento, común para ambas personas:

$$\boldsymbol{rr} = (-404.7, -260.2)$$

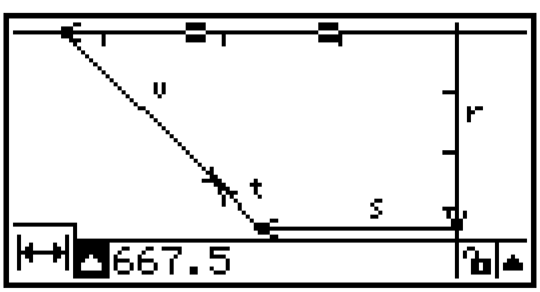
Usando este camino, tendremos la menor trayectoria posible para alcanzar el punto de encuentro de ambas personas.

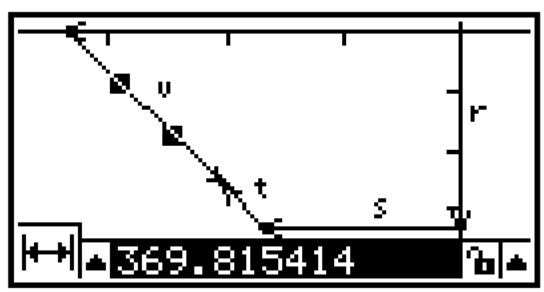
III. Diego recorre una distancia de:

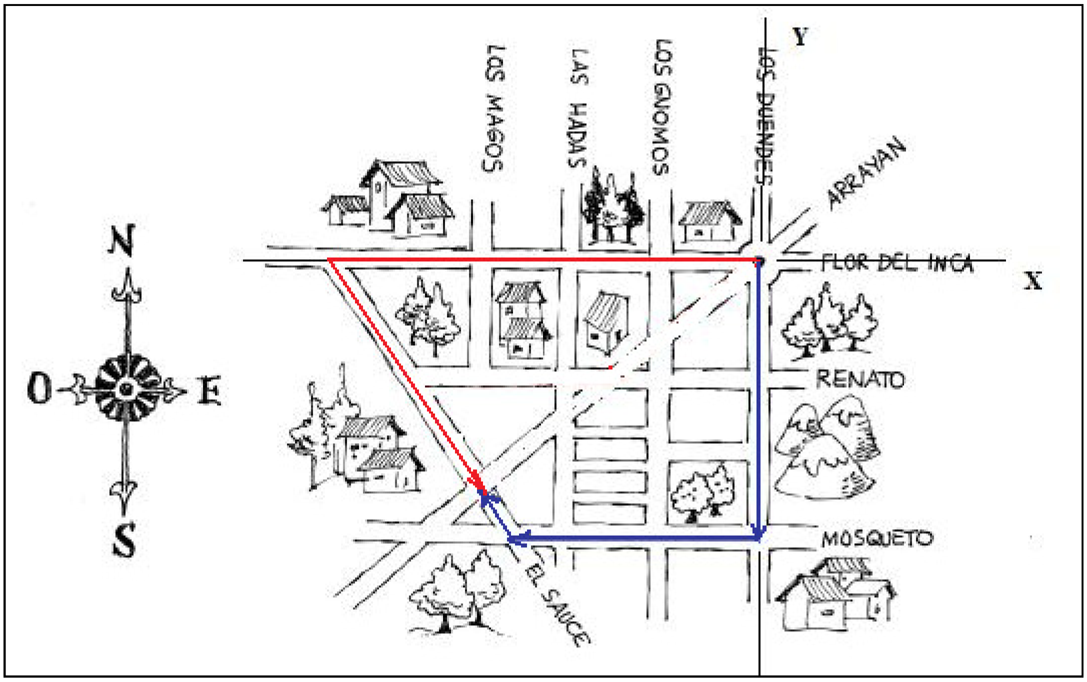
$\|\boldsymbol{r}\| + \|\boldsymbol{s}\| + \|\boldsymbol{t}\| = \|(0, -330)\| + \|(-335{,}0)\| + \|(-69.754{,}69.754)\| =$

$= 763.647\ m.$

Si utilizara el camino mostrado en la figura siguiente, no alcanzaría a llegar al punto de encuentro con Cecilia, pues necesitaría recorrer una distancia de $1037.315\ m$.







IV. En este ejemplo, las dos personas recorren distancias distintas para ir hasta el punto de encuentro. Diego recorre una distancia de:

$\|(0,-330)\| + \|(-335,0)\| + \|(-69.754,69.754)\| = \ 763.647\ m$,

mientras que Cecilia recorre una distancia:

$\|(-172.5,-172.5)\| + \|(-329,0)\| + \|(87.783,-87{,}783)\| = 697.096\ m.$

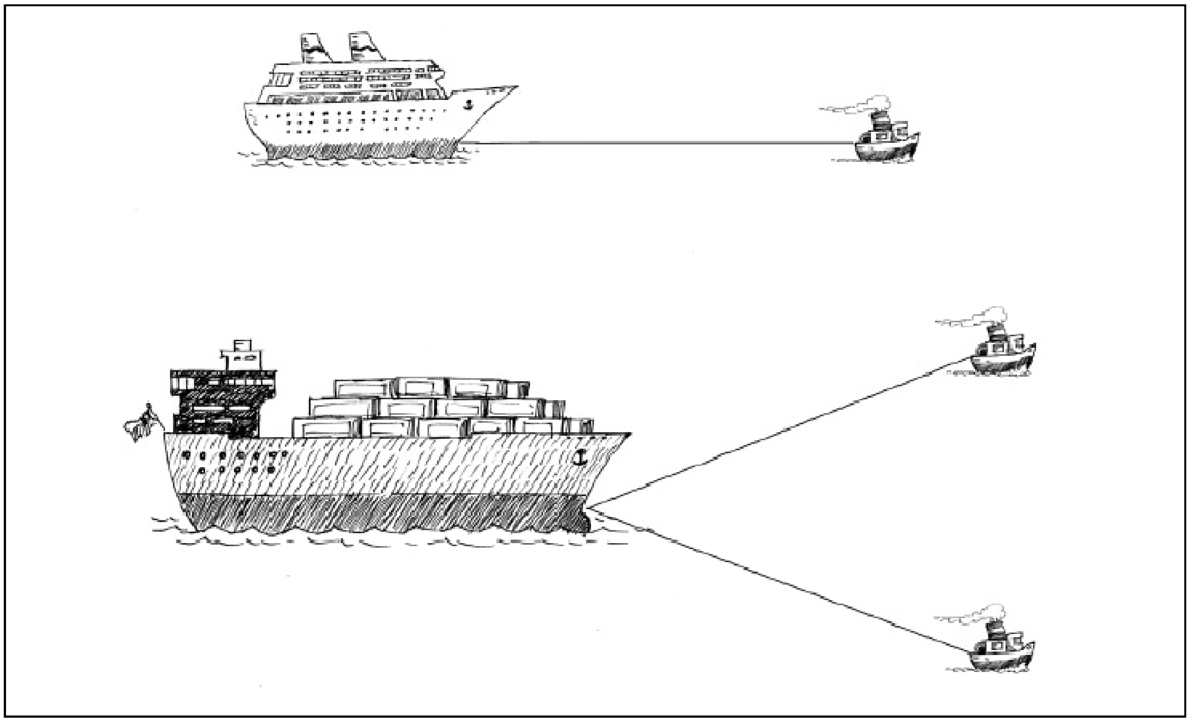
Sin embargo, ambas tienen el mismo desplazamiento neto, dado por el vector $\boldsymbol{rr}$ cuya magnitud es:

$\|\boldsymbol{rr}\| = \ \|(-404.7,-260.2)\| = 481.130\ m.$

Ejemplo B

Una de las actividades que se desarrolla en los puertos es el atraque de los barcos a un sitio, por medio de uno o dos remolcadores.

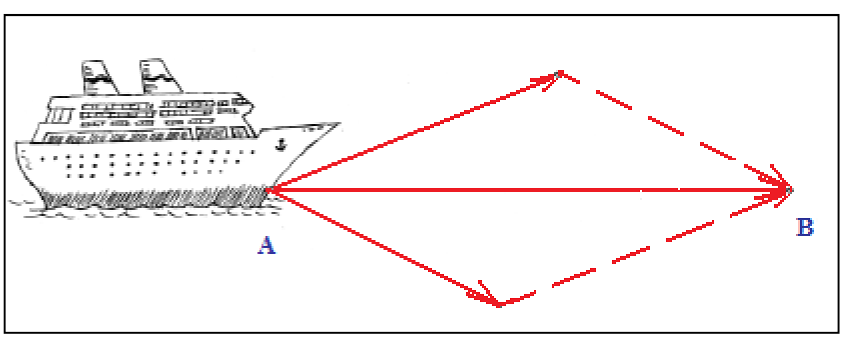
El siguiente dibujo ilustra ambas situaciones:



I. Dibujar la traza del movimiento que se espera realice el barco, en cada caso.
II. En un sistema de coordenadas, representar ambas situaciones.

Solución:

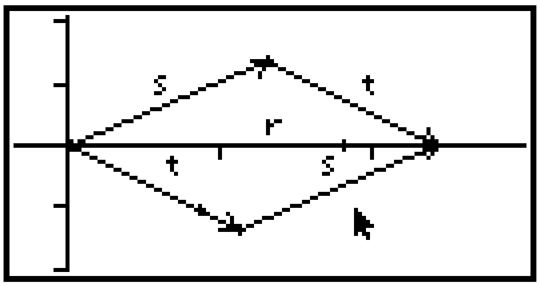
I. Ambas situaciones se ilustran en la figura siguiente:



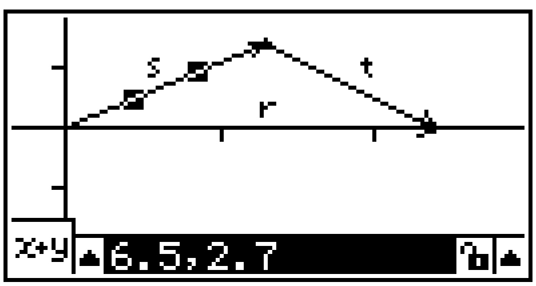
Mover el barco de A hasta B, puede realizarse desplazándose en línea recta o a través de los desplazamientos alternativos, mostrados en la figura.

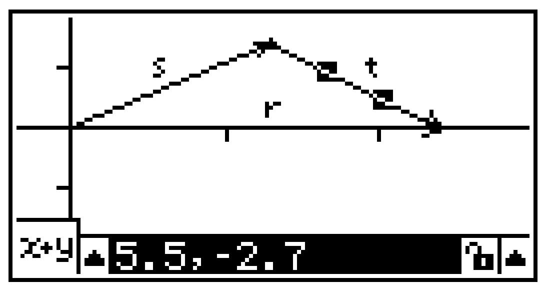
Este dibujo puede interpretarse, como la imposibilidad de mover el barco de A a B, pues no se cuenta con un barco que remolque con la capacidad de realizar la fuerza necesaria para ello. En este caso debemos utilizar dos remolques para solucionar el problema. Los vectores, en este caso representan a las fuerzas que cada uno de los remolcadores debieran realizar para mover el barco de A hasta B.

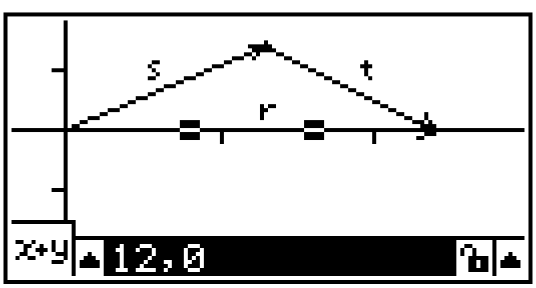
II. Ambas situaciones se representan en la figura siguiente:



En el ejemplo, suponemos que los desplazamientos los medimos en metros y si fueran vectores fuerzas, los medimos en kN.







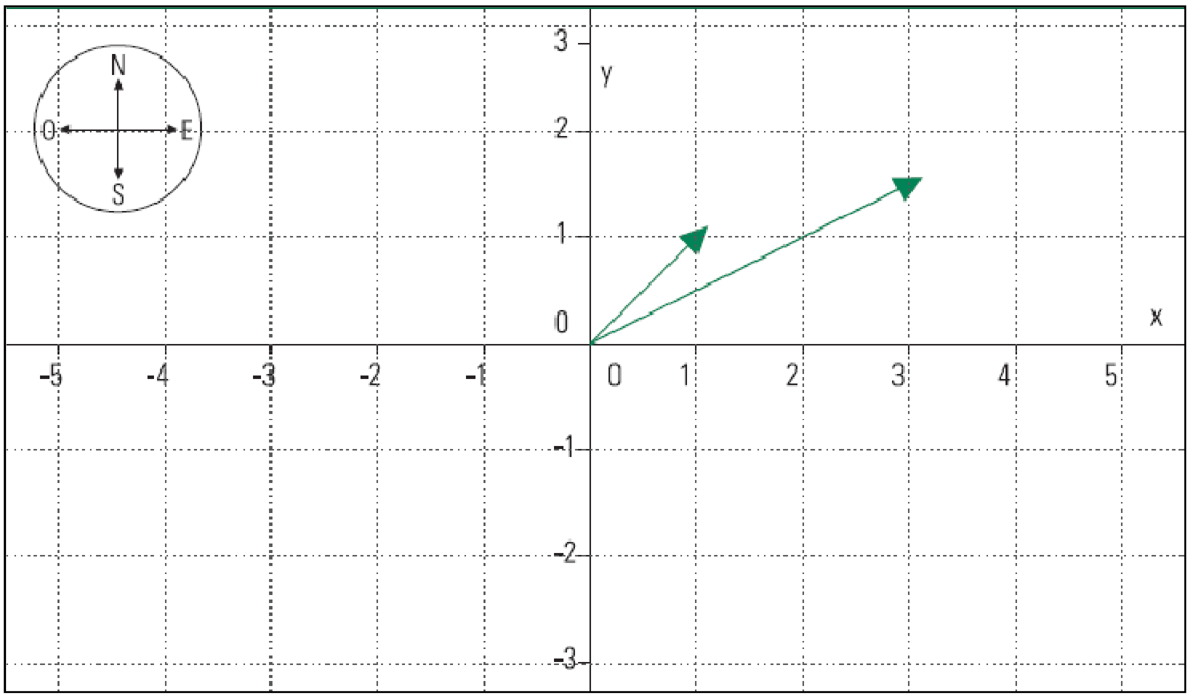
Observe que:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t} = (\mathbf{12}, \mathbf{0})$$

Donde los vectores podrían representar desplazamientos o bien vectores fuerzas.

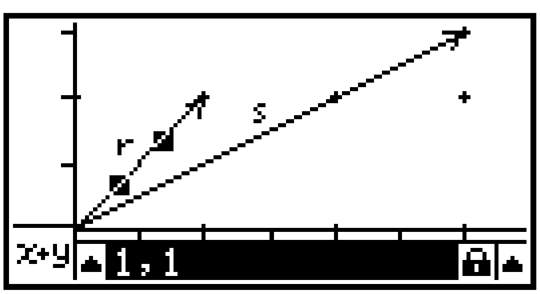
Ejemplo C

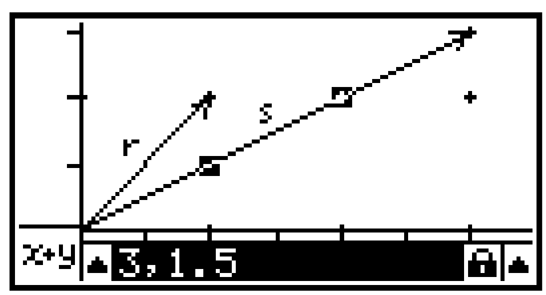
En el sistema de coordenada están dibujados dos vectores: el vector $(3, 1.5)$ representa el desplazamiento que se quiere realizar al término de un viaje y el vector $(1, 1)$ lo que ya se ha realizado. ¿Cuál es el vector que representa lo que falta por realizar del viaje?

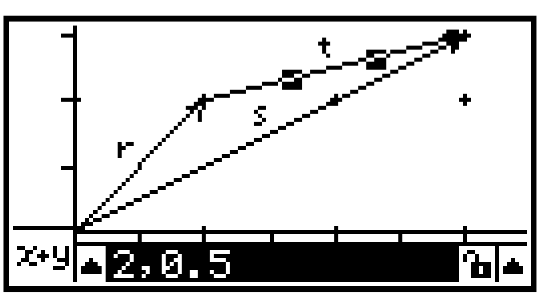


Solución:

Los vectores $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{s}$ están representados en la figuras siguientes:







El vector que representa el desplazamiento por realizar, es:

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} = (\mathbf{2}, \mathbf{0.5})$$

Obs: La magnitud del vector $\boldsymbol{t}$, no representa necesariamente el camino recorrido.

INDICACIÓN AL DOCENTE

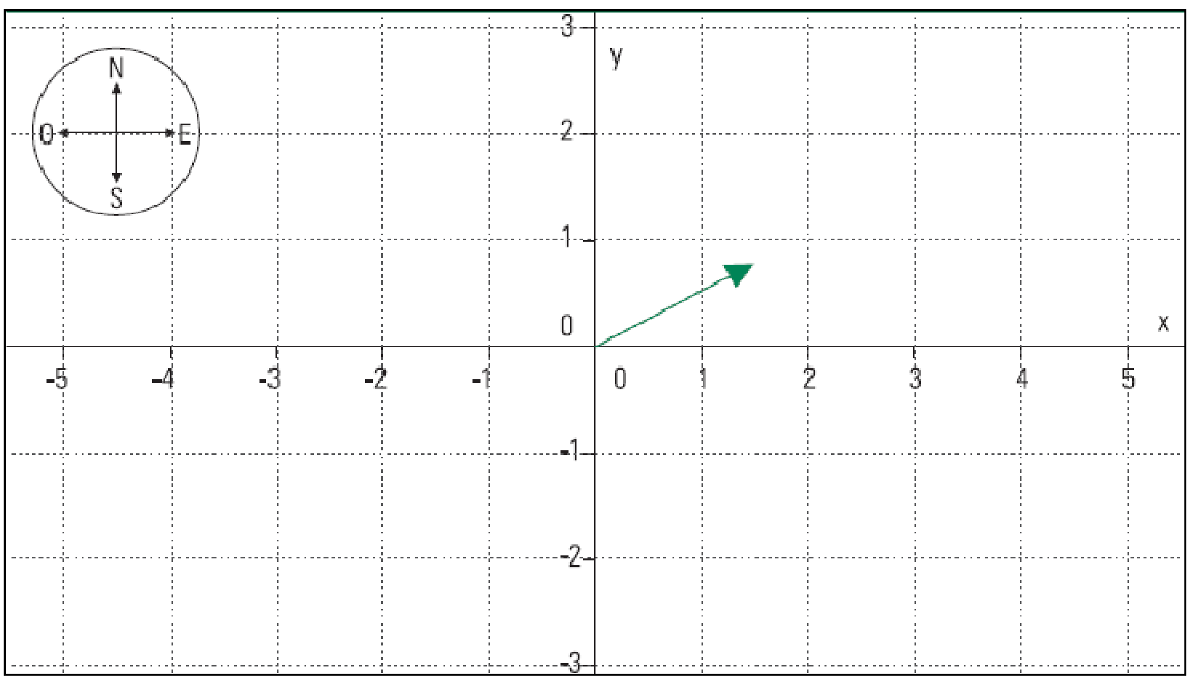
Este ejemplo permite determinar algebraicamente e interpretar geométricamente la diferencia entre dos vectores. Es necesario insistir en la representación de los vectores con su punto de partida en el origen del sistema de coordenadas; además, es importante que los alumnos y alumnas relacionen lo algebraico y lo geométrico.

Además, es conveniente enfatizar sobre las nociones de dirección y sentido de los vectores; ejemplificar un vector y su correspondiente vector opuesto con números y en el gráfico para aclarar ambos conceptos; además, constatar que por ejemplo: $(2,3) = -(-2,-3)$ y generalizar.

Ejemplo D

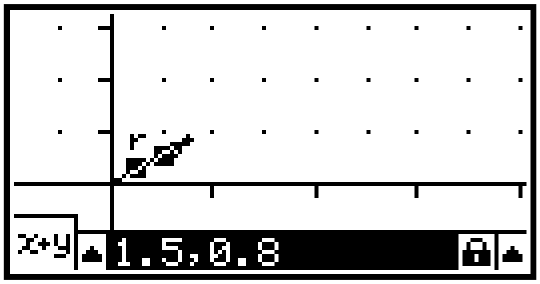
En el sistema de coordenadas que sigue se representa el camino recorrido por un móvil en una hora.

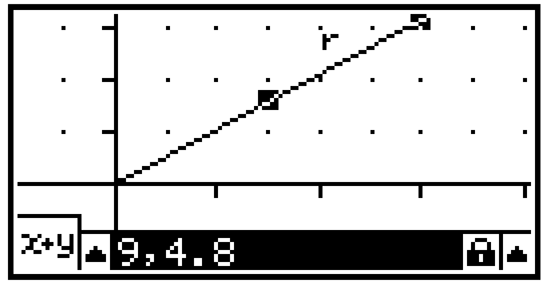
I. Si se mantiene la velocidad, dirección y sentido del movimiento, ¿cuál es la representación, en este sistema, del camino recorrido en 6 horas?

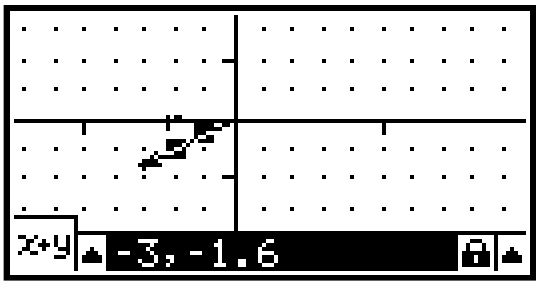


II. Si se supone que el móvil se ha venido desplazando en esta misma dirección y con la misma velocidad, ¿cuál es el vector que indica la posición hace tres horas?

Solución:

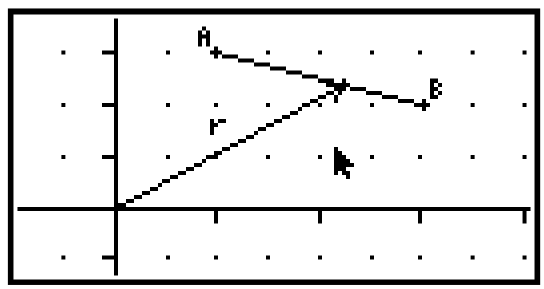






En el primer gráfico mostramos el vector que representa al camino recorrido en una hora, los gráficos siguientes, muestran la posición a las 6 y hace 3 horas.

Obs: En el ejemplo anterior el vector ***r*** representaba al camino recorrido (magnitud), sentido y dirección del movimiento de una persona. Para describir el movimiento de una persona desde un punto A hasta B, el vector ***r*** ya no representa al camino recorrido por ella, representa sólo la posición de la persona en ese camino.



INDICACIÓN AL DOCENTE

Este ejemplo permite determinar algebraicamente e interpretar geométricamente la ponderación de un vector por un escalar. Como en el ejemplo anterior, es importante que los alumnos y alumnas relacionen lo algebraico y lo geométrico.

Se sugiere hacer ejercicios considerando números enteros, decimales y fraccionarios, positivos y negativos, como factores de ponderación.

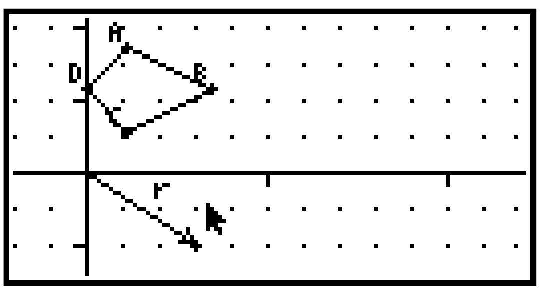
Ejemplo E

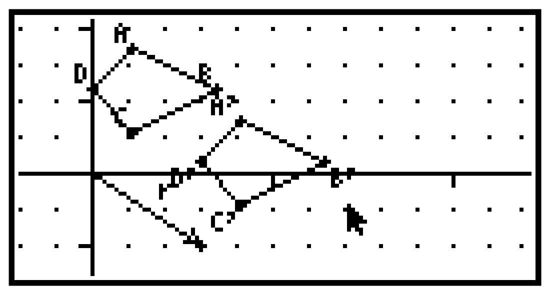
Dibujar en un sistema cartesiano un polígono irregular cualquiera y representar el desplazamiento si se traslada tres unidades hacia la derecha y dos unidades hacia el sentido negativo del eje Y.

I. Caracterizar las flechas que representan esta traslación para cada vértice del polígono.
II. Determinar el vector que corresponde a esta traslación.
III. Si los vértices de un cuadrilátero son $(1,0); (0,2); (-3,0); (0,-1)$, ¿cuáles serán los vértices de este cuadrilátero si se le aplica la traslación $(3,-2)$?

Solución:

Para las dos primeras preguntas, se puede verificar que cada punto del polígono se traslada a la nueva posición mediante el vector $\boldsymbol{r} = (2,-3)$, como se muestra en la figura siguiente:

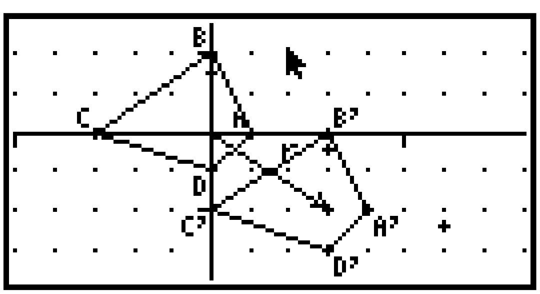




La solución de la tercera pregunta, se indica a continuación:

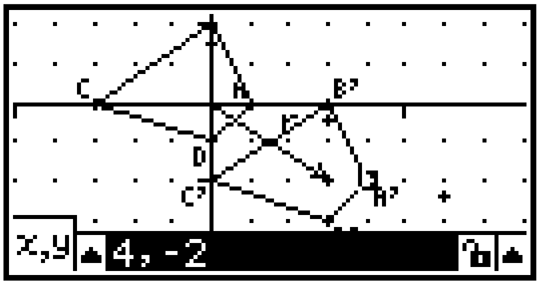
INDICACIÓN AL DOCENTE

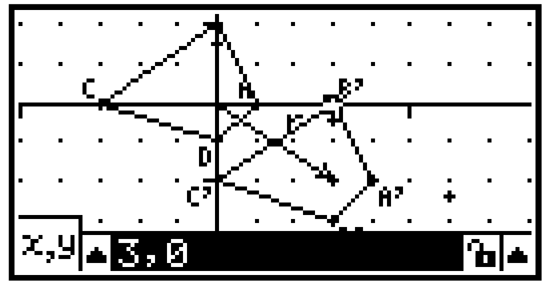
El dibujo que sigue ilustra esta traslación; se puede constatar que el polígono trasladado es congruente con el original, tema ya conocido desde Primer Año Medio. Además, sólo es necesario dibujar la imagen de los vértices trasladados y unir los correspondientes para obtener el polígono trasladado; al realizar este procedimiento se constata que las flechas asociadas a la traslación de cada vértice son paralelas y de igual medida.

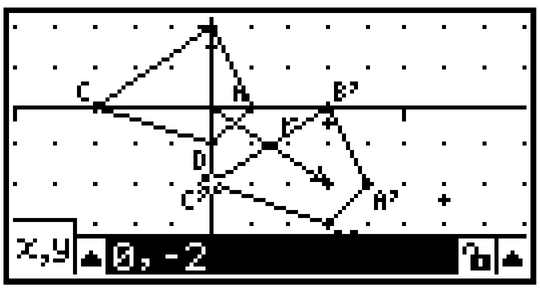


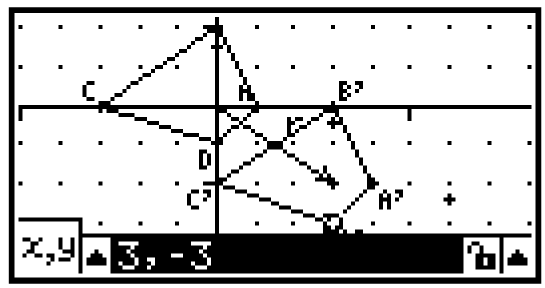
Los vértices trasladados, son: $A'(4,-2), B'(3,0), C'(0,-2)$ y $D'(3,-3)$.

Se pueden obtener las coordenadas de los vértices, usando la calculadora, como se muestra a continuación:









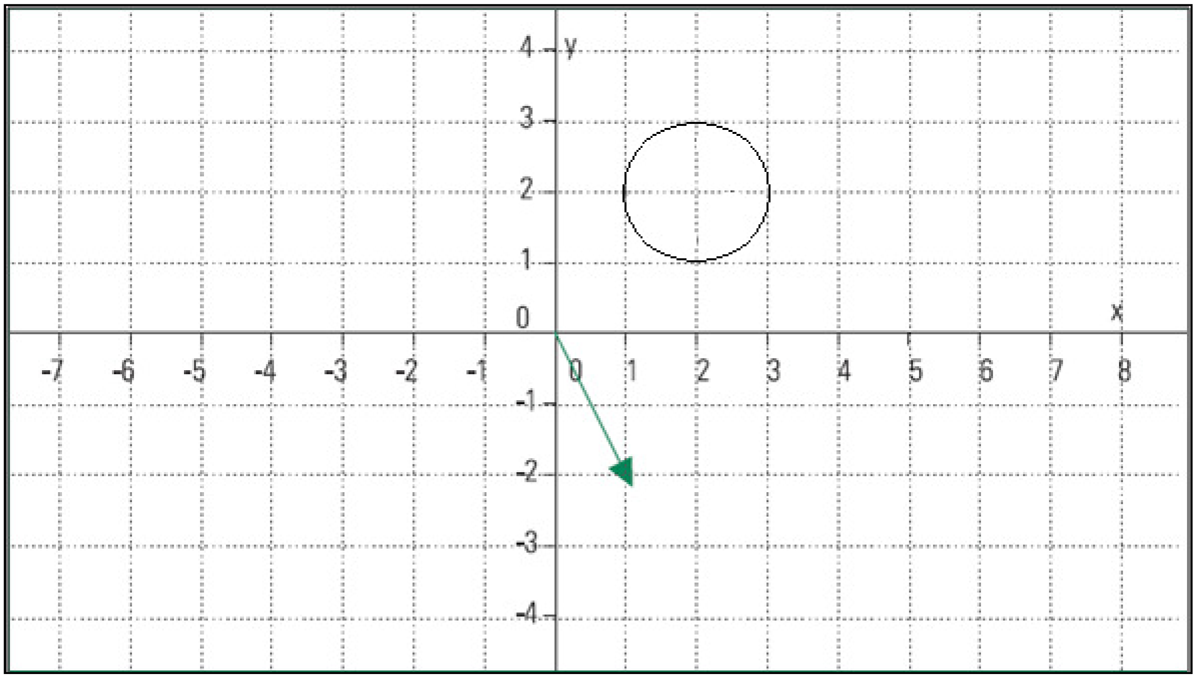
Será necesario que le profesor o profesora explique que a cualquier par ordenado de números (x, y) se le puede asociar un punto - tema que es conocido por los alumnos y alumnas - y un vector en el plano; que el vector se representa por una flecha que parte desde el origen con su otro extremo en el punto (x, y); que además se puede anotar $\vec{v} = (x, y)$.

De acuerdo al dibujo es necesario que los alumnos y alumnas reconozcan como vector $(3, -2)$ a todas las flechas paralelas y de igual magnitud y sentido que la que representa al vector $(3, -2)$ con el punto inicial en el origen.

Ejercitar con diferentes traslaciones, con distintas figuras de fácil dibujo. Interesa que los estudiantes constaten que la traslación de un punto a otro punto del plano está definida por un vector con origen en el punto (0,0).

Ejemplo F

Si una circunferencia de radio 1 tiene su centro en el punto $(2,2)$; aplicar a esta circunferencia una traslación $(1,-2)$.



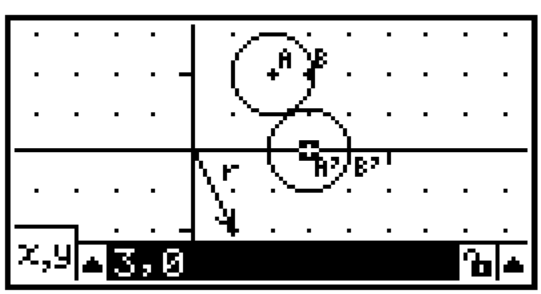
I. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de la circunferencia trasladada?

II. El punto $(3,2)$ pertenece a la circunferencia en su posición inicial. ¿cuáles son sus coordenadas después de la traslación?

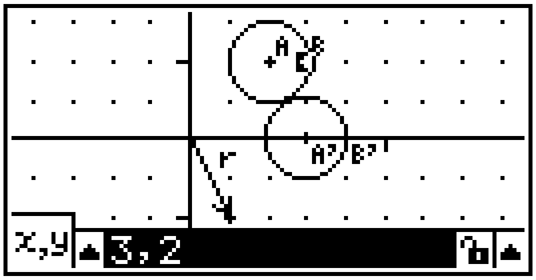
III. Si a la circunferencia inicial se le aplicase una traslación tal que al punto $(3,2)$ de la circunferencia le correspondiera el punto $(-3,-5)$ en la circunferencia trasladada, ¿cuál sería el vector traslación en ese caso y cuáles serían las coordenadas del nuevo centro de la circunferencia?

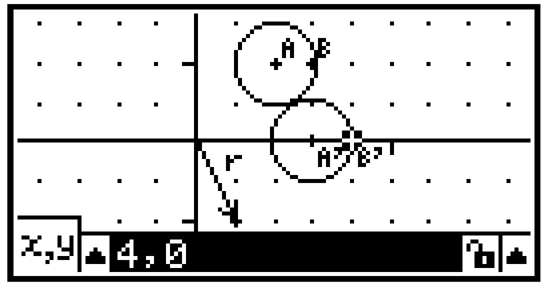
Solución:

I. El alumno o alumna, puede verificar que las coordenadas del nuevo centro será:

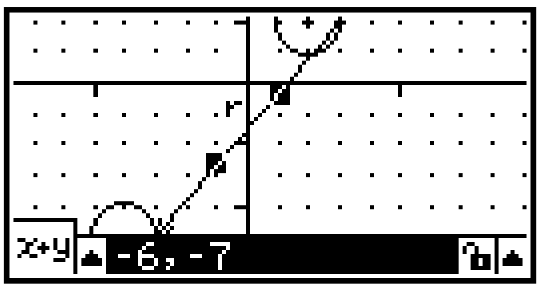


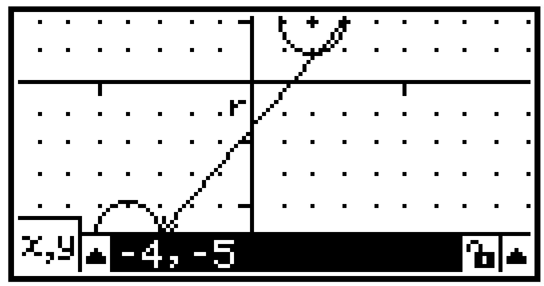
II. En las figuras siguientes se muestran las coordenadas del punto $(3,2)$, antes y después de la traslación.





III. En la figura siguiente se muestra el vector de traslación y el nuevo centro de la circunferencia.



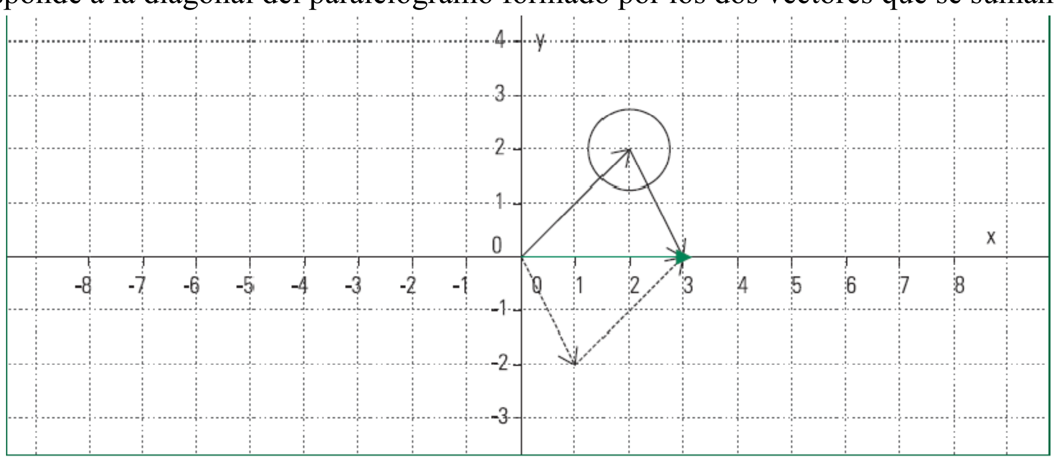


INDICACIÓN AL DOCENTE

Ejemplos de este tipo se pueden utilizar para comprender la suma de vectores. Si el centro de la circunferencia se le asocia un vector posición $(2,2)$ y a la traslación aplicada al vector $(1,-2)$, el nuevo centro tendrá asociado el vector posición $(3,0)$ que corresponde a :

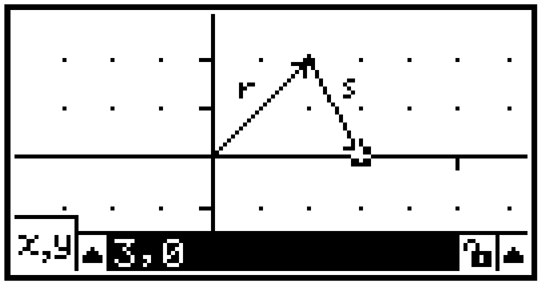
$$(2,2)+(1,-2)=(2+1,2-2)=(3,0).$$

Es necesario representar esta expresión en el gráfico y constatar que este último corresponde a la diagonal del paralelogramo formado por los dos vectores que se suman.



Es necesario que los alumnos y alumnas ejerciten tanto gráfica como numéricamente la adición de vectores.

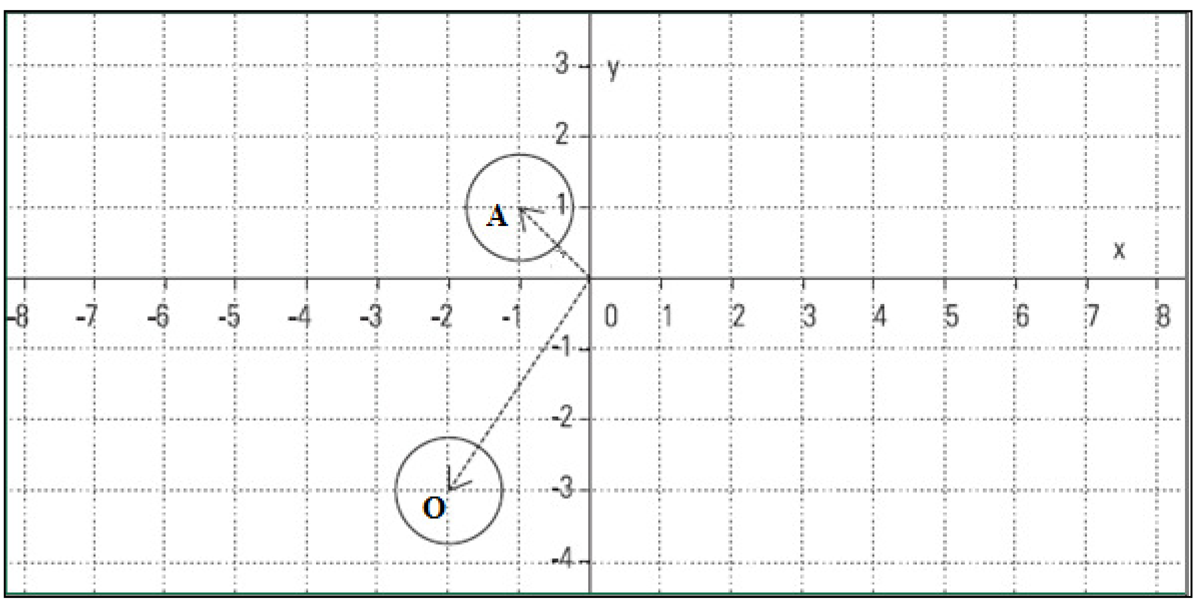
Usando la calculadora la solución, es:



Ejemplo G

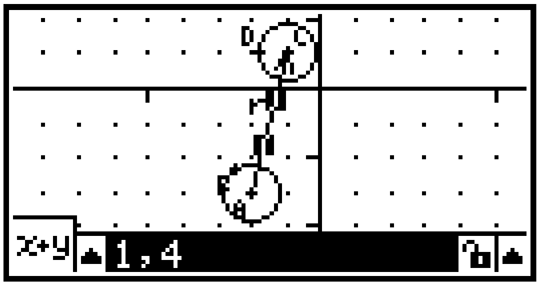
Considerar, como en el gráfico que sigue, dos posiciones diferentes de una misma circunferencia: una con centro en $O = (-2, -3)$ y la otra con centro en $A = (-1,1)$.

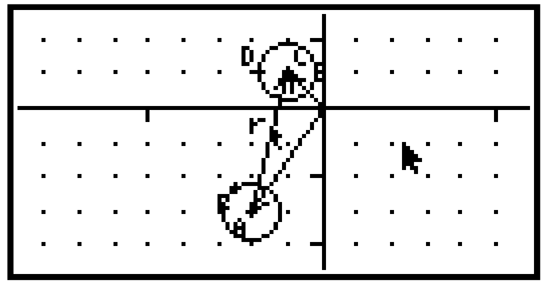
I. Determinar y trazar el vector que permite trasladar la circunferencia desde la posición con centro en O a la posición con centro en A.
II. A partir del resultado obtenido, determinar el vector que permite realizar el traslado inverso.
III. En ambos casos, expresar ese vector en función de los vectores que definen los centros de ambas circunferencias.



Solución:

I. Usando calculadora, se tiene:





II. El traslado inverso, para mover la circunferencia de A hasta O, está dado por el vector $-\vec{r} = -(1,4) = (-1,-4)$.

III. En el primer caso, tenemos:

$$\vec{r} = (-1,1) - (-2,-3) = (1,4).$$

En el segundo caso:

$$-\vec{r} = (-2,-3) - (-1,1) = (-1,-4).$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Ejemplos de este tipo se pueden utilizar para el cambio de signo de los vectores y, por supuesto, para la sustracción de vectores.

Ejemplo H

Ejercitar adición y sustracción de vectores resolviendo y graficando situaciones como las siguientes:

I. $(3,4) + (5,-2) =$

II. $(2,-3) - (6,-7) =$

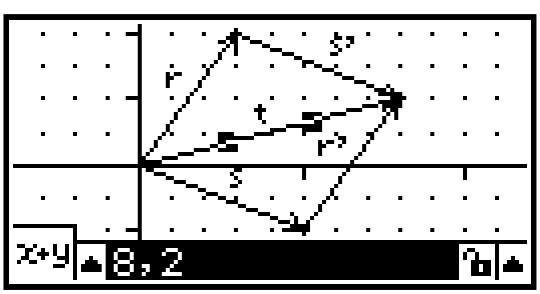
III. $(x,y) + (-3,13) = (0,-5)$, ¿cuál es el valor de (x,y)?

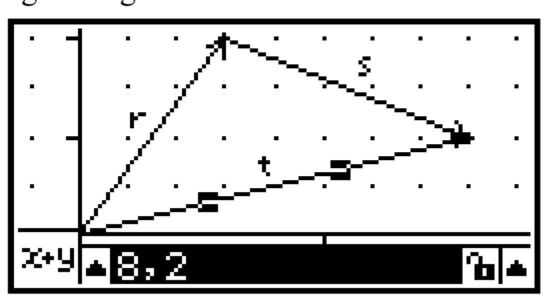
IV. Calcular algebraica y gráficamente la suma siguiente:

$$(3,2) + (-2,-4) + (-3,0) + (-1,4) =$$

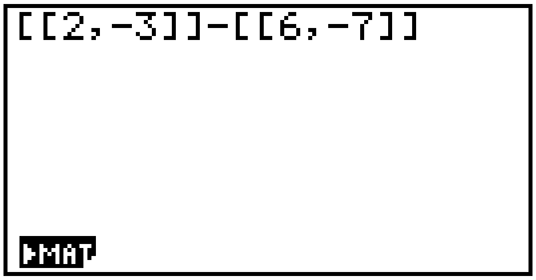
Solución:

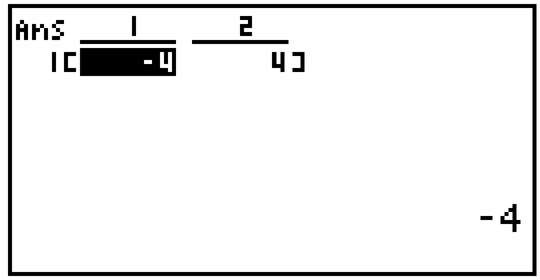
I. Mostramos dos posibles soluciones en las figuras siguientes:



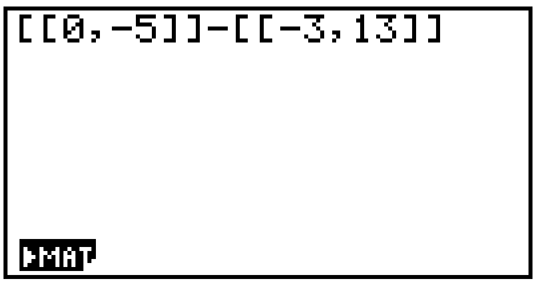


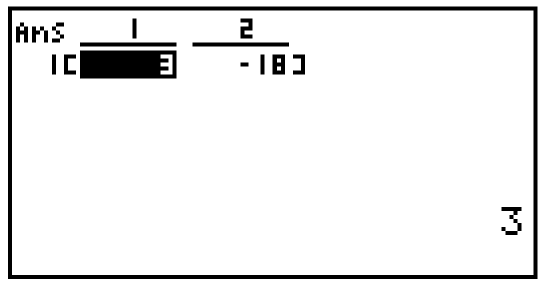
II. Una solución alternativa para este caso es, usando:



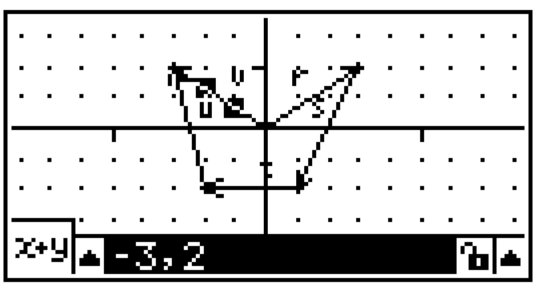


III. El valor del vector (x, y) , es:



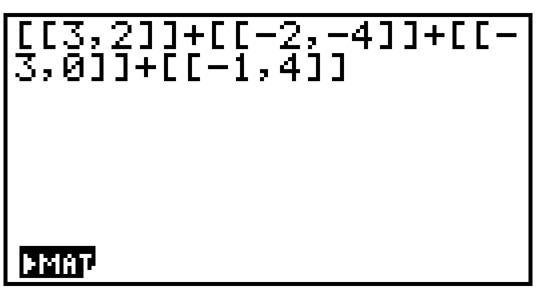


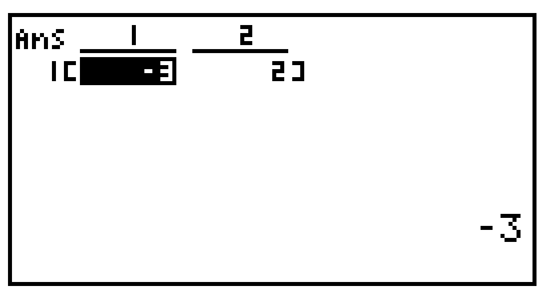
IV. La solución gráfica y la algebraica, se muestran a continuación:



Obs:

Los vectores usados en la calculadora, en realidad, corresponden a matrices de orden 1×2.





Ejemplo I

Considerar los vectores $(1,3); (4,12); (0,0); (-2,-6)$.

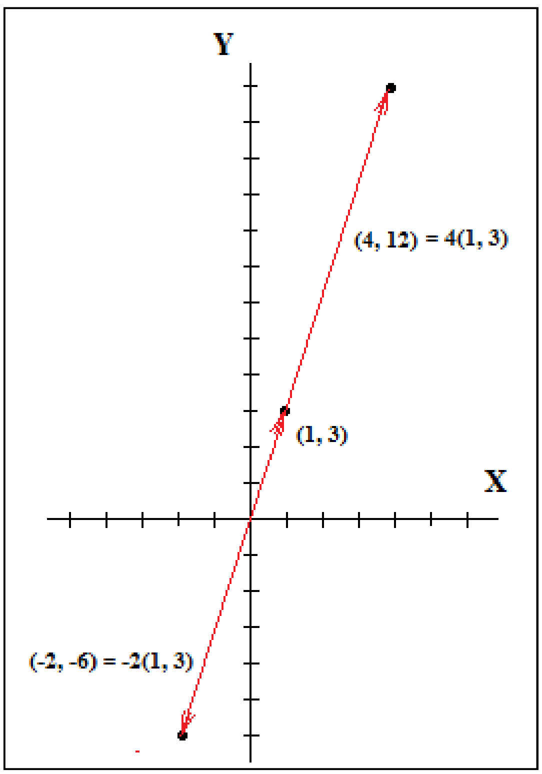
Expresar algebraicamente, por medio del producto de un escalar por un vector, cada uno en términos del otro; graficar los cuatro vectores.

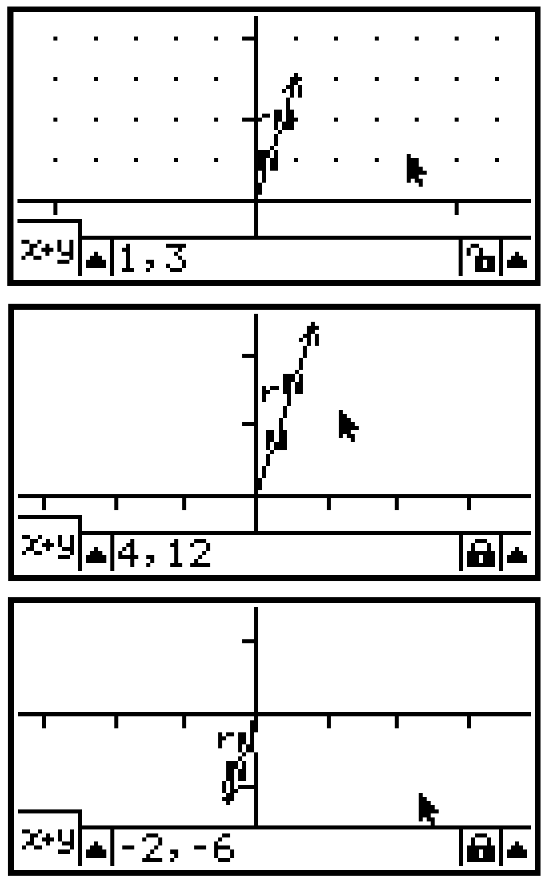
INDICACIONES AL DOCENTE

Interesa que los alumnos y alumnas consideren tanto la expresión

$$(4,12) = 4(1,3) \quad \text{como la expresión} \quad (1,3) = \frac{1}{4}(4,12).$$

Solución:





Además, conviene que dibujen estos vectores y constaten que están en una misma recta que pasa por el origen; no se trata que ‘formalicen’ el concepto de dependencia lineal, sino que sólo tengan una aproximación empírica con esta regularidad.

Se pueden proponer cinco o seis vectores y que ellos seleccionen aquellos que se pueden expresar uno en función del otro o, lo que es lo mismo, que pertenezcan a una misma recta que pasa por el origen.

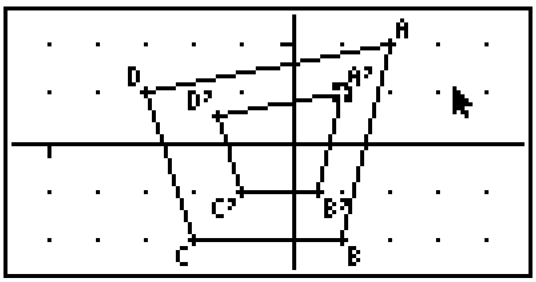
Ejemplo J

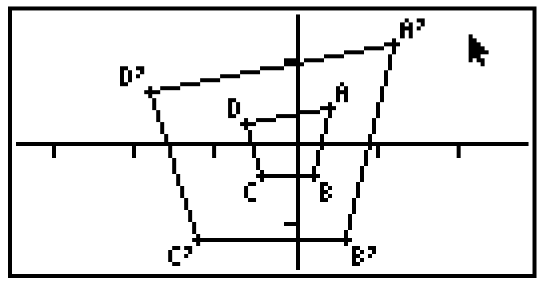
Dado un cuadrilátero cuyos vértices tienen coordenadas determinadas; anticipar qué figura resulta al multiplicar los vectores que definen los vértices por el escalar 2, o bien por el escalar 0,5.

Dibujar la figura que se obtiene y comparar con la primitiva.

Solución:

En los gráficos siguientes se muestran los dos casos solicitados.





Actividad 2

Generalizan la noción de vector y la de operatoria vectorial desde el plano al espacio tridimensional.

Ejemplo A

Representar puntos del espacio en el sistema de coordenadas X, Y, Z ;

- $A = (3, 4, 0)$ $B = (3, 4, 1)$ $C = (3, 4, -1)$
- $D = (1, 1, 1)$ $E = (2, 2, 2)$ $F = (3, 3, 3)$
- $G = (3, 0, -1)$ $H = (4, 0, -1)$ $I = (5, 0, -1)$

INDICACIONES AL DOCENTE

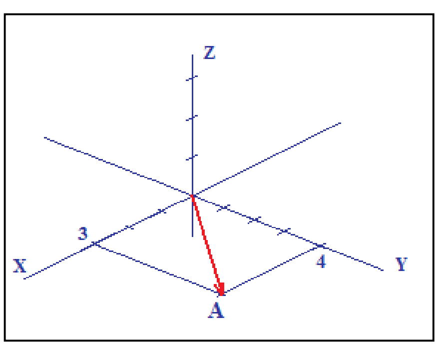
Se sugiere al profesor o profesora que utilice medios físicos para que los estudiantes puedan visualizar estos puntos en el espacio y establecer la relación con su ubicación en cualquiera de los ocho octantes en que se divide el espacio.

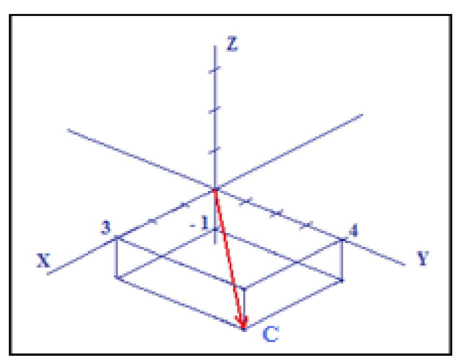
Podría pegar cartulinas con cuadrículas en los muros que concurren en alguna de las esquinas de la sala de clases; así es más fácil distinguir los planos XY, XZ y YZ en cada uno de los muros y el octante positivo de los tres ejes de coordenadas.

También se puede utilizar una escuadra, de modo que un cateto se quede sobre el plano XY con el ángulo recto en el punto (x, y); si uno de los otros vértices de la escuadra se ubica en el origen, el tercer vértice corresponderá a la coordenada (x, y, z); en esta ubicación, la hipotenusa de la escuadra corresponde al vector que se representa por una flecha con su origen en $(0,0,0)$ y su extremo en (x, y, z).

Solución:

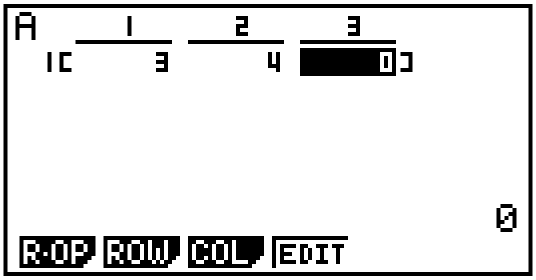
Por ejemplo, los vectores A y C, pueden representarse como:

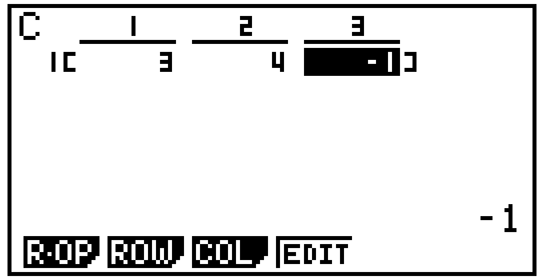




La calculadora no permite graficar en 3 D, sin embargo podemos representar los vectores

$A = (3, 4, 0)$ y $C = (3, 4, -1)$ como matrices:





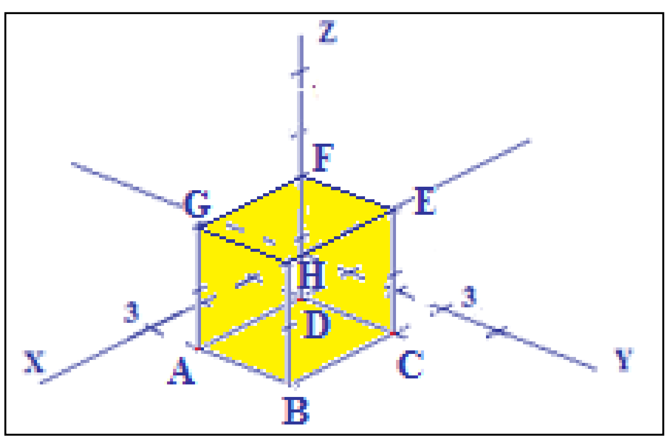
Ejemplo B

Definen un cubo en el espacio por medio de las coordenadas de los vértices.

Solución:

Por ejemplo, al dibujar el cubo, de vértices A = (3 , 1 , 0) , B = (3, 3, 0) , C = (1, 3, 0) , D = (1 , 1, 0) , E = (1 , 3 , 2), F = (1 , 1 , 2), G = (3 , 1 ,2) y H = (3 , 3, 2),

tenemos el gráfico siguiente:



Ejemplo C

Considerando las coordenadas de los vértices de un cubo (pueden tomarse las del ejemplo anterior), determinar las nuevas coordenadas si se lo moviera 3 unidades hacia delante, 4 hacia la derecha y 2 hacia arriba.

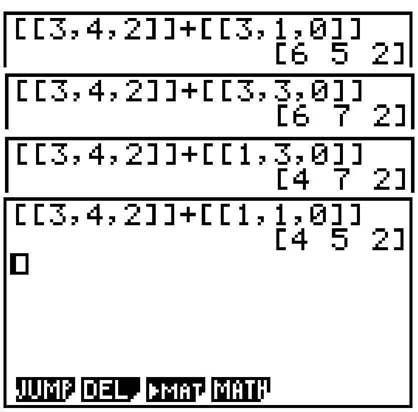
Solución:

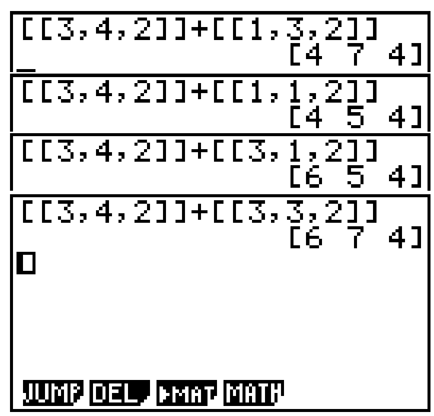
Las coordenadas de los vértices del cubo desplazado son:

$A' = (3,4,2) + (3,1,0) = (6,5,2)$, $B' = (3,4,2) + (3,3,0) = (6,7,2)$, $C' = (3,4,2) + (1,3,0) = (4,7,2)$, $D' = (3,4,2) + (1,1,0) = (4,5,2)$, $E' = (3,4,2) + (1,3,2) = (4,7,4)$,

$F' = (3,4,2) + (1,1,2) = (4,5,4)$, $G' = (3,4,2) + (3,1,2) = (6,5,4)$, $H' = (3,4,2) + (3,3,2) = (6,7,4)$.

Comprobación:





INDICACIONES AL DOCENTE

Es necesario relacionar las traslaciones realizadas en el plano con estas en el espacio tridimensional y asociarles los vectores correspondientes. Este ejemplo permite utilizar la adición de vectores.

Es preferible trabajar con un modelo físico para visualizar el movimiento del cubo desde su posición inicial a la posición después de la traslación.

Se sugiere hacer traslaciones del cubo por uno de los planos de sus caras y anticipar qué cambios se producirían en las coordenadas y cuáles permanecerían constantes en ese caso.

Ejemplo D

Determinar qué traslación hay que aplicar a un cubo de coordenadas $(1,1,0); (1,2,0); (2,1,0); (2,2,0); (1,1,-1); (1,2,-1); (2,1,-1); (2,2,-1);$ para obtener otro tal que dos de sus coordenadas sean $(1,-1,0)$ y $(2,-1,0)$.

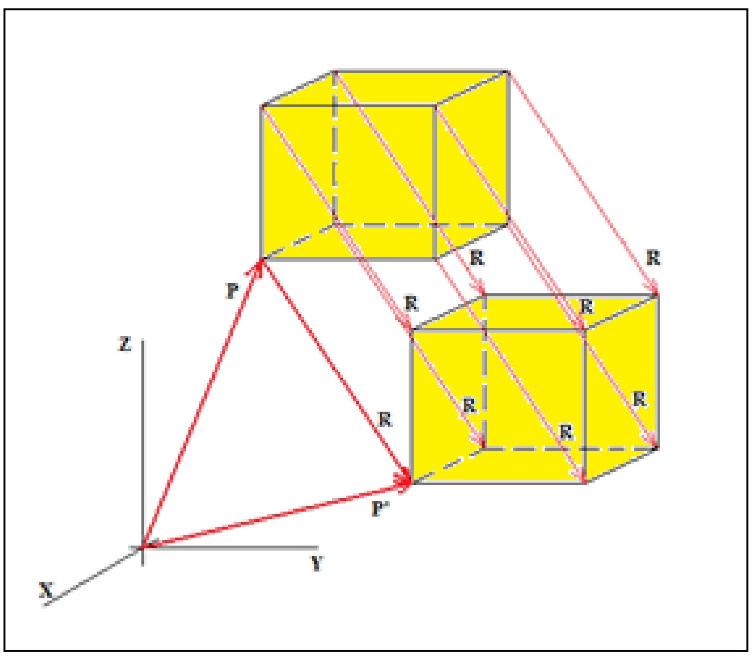
Solución:

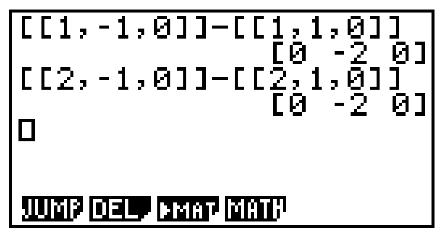
Las coordenadas de los vértices del cubo trasladado deben satisfacer la ecuación:

P' = P + R , donde P' representa a las coordenadas de los nuevos vértices, P las coordenadas antiguas y R el vector de traslación. Este último debe ser constante, es decir:

R = P' – P = constante.

El gráfico siguiente muestra un esquema de la situación y el vector R:





INDICACIONES AL DOCENTE

Este es un ejemplo muy interesante por la variedad de soluciones que presenta.

Es un ejemplo que se puede relacionar con la resta de vectores en el espacio y generalizar la resta de vectores con dos dimensiones.

Ejemplo E

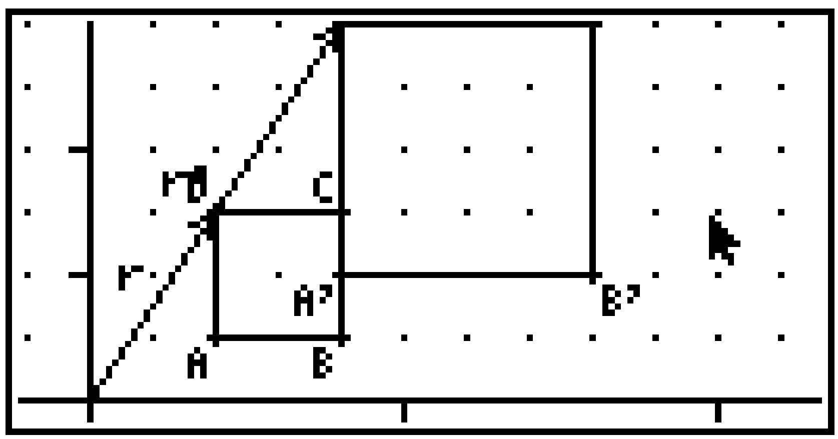
Ampliar el cubo del ejemplo anterior al doble de sus aristas.

Solución:

En este caso las coordenadas de los vértices nuevos P', se relacionan con los antiguos P, mediante la ecuación:

P' = k P , donde k es el factor de amplificación (o disminución), que en este caso es k = 2.

El gráfico siguiente muestra un cubo cualquiera proyectado en un plano, de manera que se pueda interpretar como un cuadrado.



INDICACIONES AL DOCENTE

Este es un ejemplo que permite darle sentido a la multiplicación por un escalar; relacionar este ejemplo en el espacio tridimensional con los ejemplos del plano.

Proponer otros ejemplos con escalares no enteros y con números menores que 1. Relacionar, además, con la semejanza de cuerpos regulares.

Ejemplo F

Resolver los siguientes ejercicios de cálculo vectorial:

I. $(3,4,-5)-(-2,4,0)+0.5(0,-3,2)=$
II. $(-2,3,0)+0.3(2,-3,0)=$

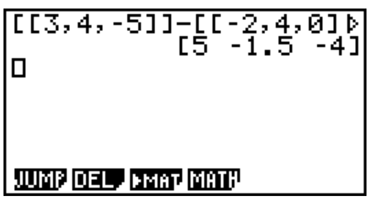
¿Cómo se pueden caracterizar estos vectores?

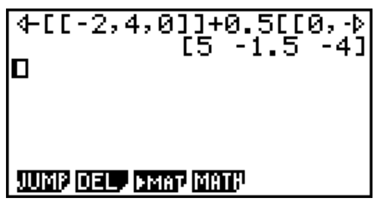
III. Determinar los valores de x,y,z sabiendo que $(x,-4,0)-1.5(x,-y,3)=-(2,6,z)$

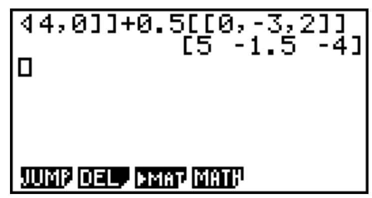
Solución:

Usando la calculadora, se tiene:

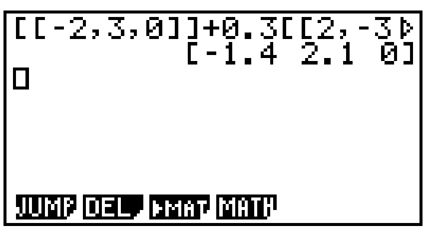
I. $(3,4,-5)-(-2,4,0)+0.5(0,-3,2)=(5,-1.5,-4)$

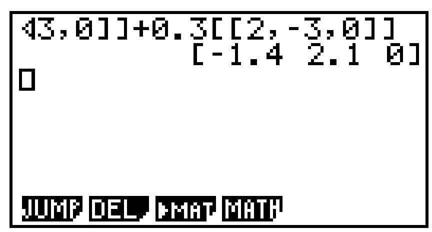






I. II. $(-2,3,0)+0.3(2,-3,0)=(-1.4,2.1,0)$





III. De $(x,-4,0)-1.5(x,-y,3)=-(2,6,z)$, obtenemos:

$$(-0.5x,-4+1.5y,-3)=(-2,-6,-z) => \ x=4,\ \ y=-\frac{4}{3}\ ,z=3$$

INDICACIONES AL DOCENTE

Es importante que los alumnos y alumnas desarrollen y utilicen sus destrezas para efectuar cálculos.

En este último ejemplo, la calculadora no resuelve ecuaciones de este tipo, lo que es bueno, ya que el alumno o alumna estarán obligados a realizar los cálculos correspondientes.

Actividad 3

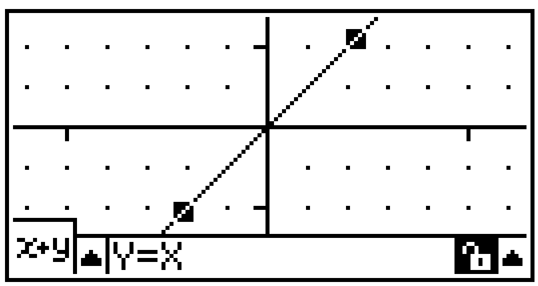
Determinan la ecuación vectorial de la recta en el plano, la relacionan con la ecuación cartesiana de la misma y extienden a la ecuación vectorial de una recta en el espacio.

Ejemplo A

Versión 1

I. Graficar en el plano la recta $L: y = x$.
   - Determinar qué tienen de común los vectores (o los puntos) que pertenecen a ella;
   - seleccionar 7 de estos vectores y expresar cada uno de ellos como producto de un escalar por uno de los otros vectores;
   - reconocer que expresiones de la forma $\vec{v}(t) = t(1,1)$ o bien $\vec{v}(t) = t(5,5)$ son ecuaciones vectoriales de la misma recta y que esta pasa por el origen.

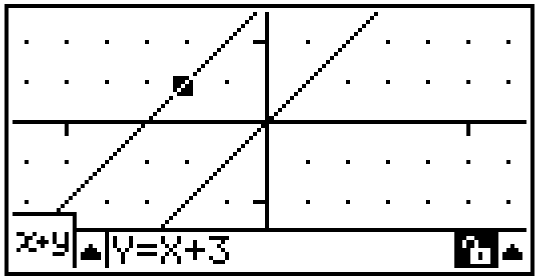
Solución:



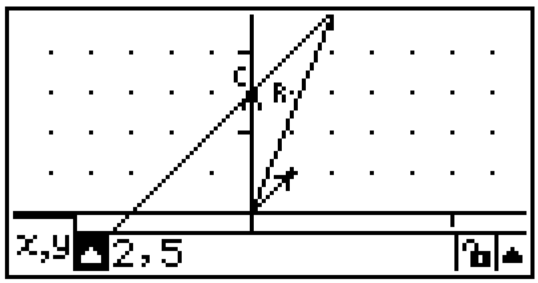
Los puntos (o vectores) de la recta L : y = x , son de la forma $R = (x, y) = (x, x) = x(1,1)$, donde x es un número real cualquiera. Esto puede escribirse, como $\vec{v}(t) = t(1,1)$, con t real.

II. En el mismo gráfico anterior, trazar la recta $L': y = x + 3$.
   - Reconocer el paralelismo gráfico entre ambas rectas y justificarlo desde la geometría analítica.;
   - marcar el punto $(0,3)$ y cuatro más de esta recta;
   - expresar cada uno de estos cuatro puntos como suma entre el vector $(0,3)$ y uno de los vectores de la recta L;
   - reconocer que expresiones de la forma $\vec{v}(t) = (0,3) + t(1,1)$ u otras equivalentes son ecuaciones vectoriales de la recta L' ; distinguir entre vector posición y vector dirección.

Solución:

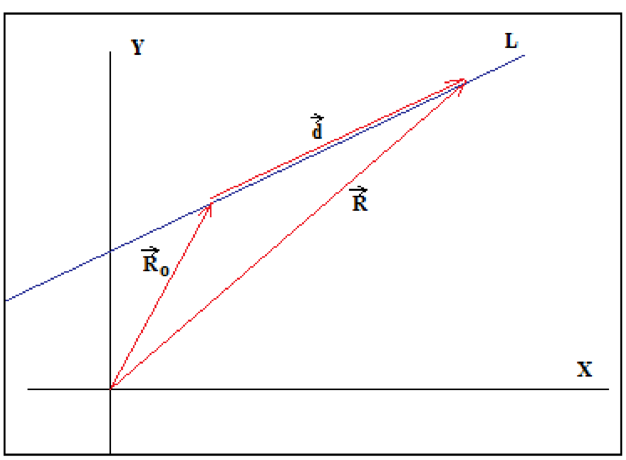


En la figura siguiente se muestra el punto R = (2, 5) , determinado a partir de la ecuación vectorial de la recta $\vec{v}(t) = (0,3) + t(1,1)$, con $t = 2$. Es decir, R = $\vec{v}(1) = (0,3) + 2(1,1) = (2,5)$.



III. Generalizar la ecuación vectorial para cualquier recta que pasa por un punto cualquiera del plano y es paralela a una recta L, que pasa por el origen.

Solución:



La ecuación vectorial de la recta L, que pasa por el punto dado por $\vec{R}_0$ y que es paralela al vector director $\vec{d}$, es:

$$L: \vec{R}(t) = \vec{R}_0 + t\vec{d} \ , \ t \in \mathbb{R}$$

Versión 2

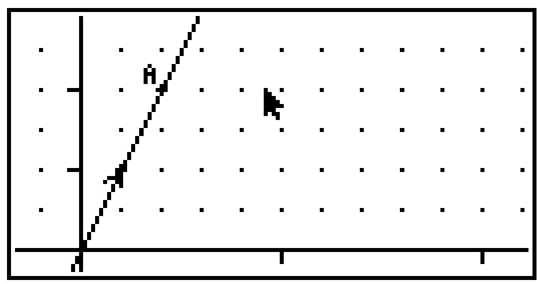
Considerar el vector $(1,2)$ y todos los vectores que resulten de multiplicar este por un número real. ¿Qué figura se obtiene?

Considerar la recta $y = 3x$, graficarla y obtener la ecuación vectorial siguiendo el procedimiento anterior.

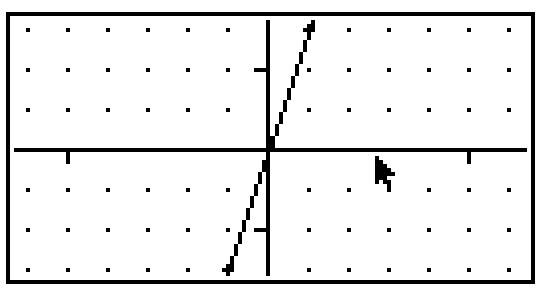
Trasladar la recta $y = 3x$ en el vector $(0,3)$. ¿Qué figura se obtiene? Plantear la ecuación de la nueva figura.

Solución:

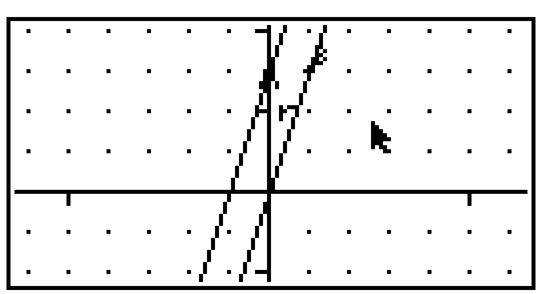
Se obtiene la recta de la figura siguiente:



Se observa que la recta y = 3 x , puede obtenerse graficando el punto (1,3) y todos los múltiplos de él. La ecuación vectorial, es: L: $\vec{v}(t) = t(1,3)$, t es real.



En la figura se muestra la traslación de la recta dada mediante el vector (0, 3). La ecuación que se obtiene, es: L: $\vec{v}(t) = (0,3) + t(1,3)$, t es real.



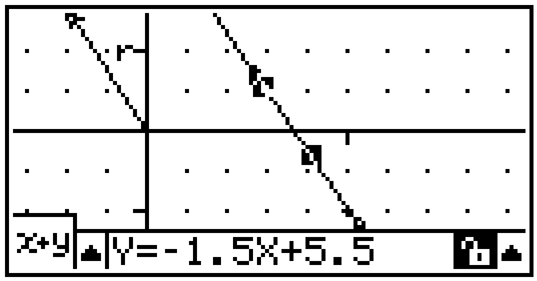
Ejemplo B

Establecer la ecuación vectorial y analítica de la recta que pasa por el punto $(5, -2)$ y es paralela a la dirección del vector $\vec{d} = (-2,3)$.

Solución:

La ecuación vectorial de la recta es: L: $\vec{v}(t) = (5, -2) + t(-2,3)$, t es real. La forma analítica, es:

L: $y = -1.5x + 4.5$, como se muestra en la figura.



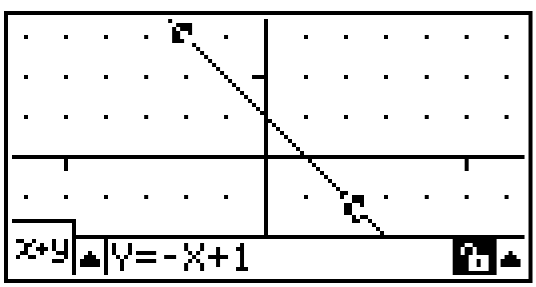
Ejemplo C

Establecer la ecuación vectorial de la recta que pasa por dos puntos dados:

$$A = (-2,3);\ \ B = (2, -1).$$

Solución:

La ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos dados, es L: $\vec{R}(t) = (x, y) = (x, -x + 1) = (0,1) + x(1, -1) = (0,1) + t(1, -1)$, t es real.



Otra forma es : L: $\vec{R}(t) = (x, y) = A + t[B - A] = (-2,3) + t[(2, -1) - (-2,3)] =$

$= (-2,3) + t(4, -4)$, t es real. Aunque se escriben en forma distinta, ambas ecuaciones representan a la misma recta.

Ejemplo D

- Establecer la ecuación analítica y vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-3,2)$ y es paralela a la recta $y = 3x - 2$.
- Determinar si los puntos $(0,0)$; $(0,11)$; $(-3,0)$ pertenecen o no a esta recta.

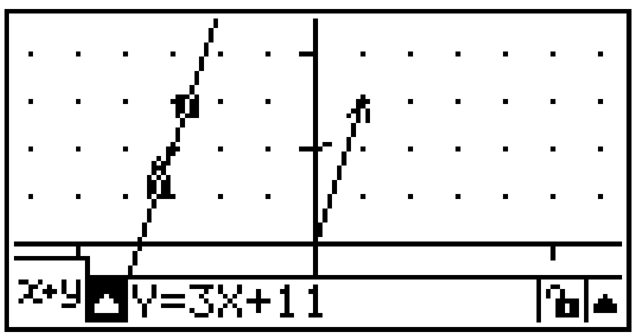
Solución:

La recta $y = 3x - 2$, en su forma vectorial es $\vec{v} = (x, y) = (x, 3x - 2) = (0, -2) + x(1,3), x$ es real. La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto A = (-3, 2) y que es paralela a la recta dada, es:

$$L\colon \vec{R}(t) = (-3,2) + t(1,3), t \text{ es real.}$$

La ecuación analítica se obtiene de $L\colon \vec{R}(t) = (-3,2) + t(1,3) = (-3 + t, 2 + 3t) = (x, y)$

Eliminando el parámetro t, queda $L\colon\ y = 3x + 11$.



El punto (0,0) no pertenece a la recta, como puede verse en la figura, o ya que no satisface a la ecuación $L\colon\ y = 3x + 11$.

El punto (0, 11) pertenece a la recta ya que $11 = 3(0) + 11$.

El punto (-3, 0) no pertenece a la recta pues $0 \neq 3(-3) + 11$.

Ejemplo E

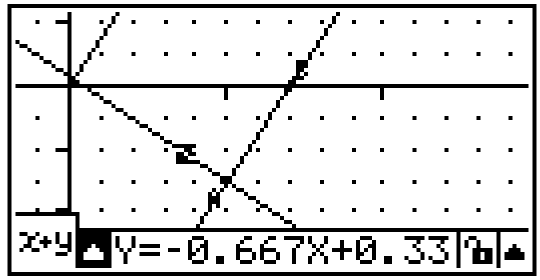
Determinar la ecuación vectorial de una recta perpendicular a la recta

$$\vec{v}(t) = (5,-3) + t(2,3).$$

Solución:

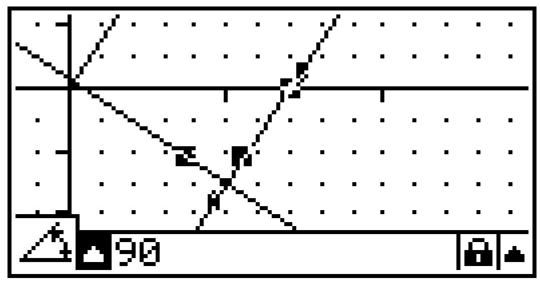
Una solución está dada por la recta de ecuación:

$L: y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.



La forma vectorial es:

$L: \vec{v}_{\perp} = (5,-3) + t(-2,3)$, t es real.



Ejemplo F

Versión 1

En un modelo físico ubicar los puntos $(3,3,3)$, $(5,5,5)$, $(10,10,10)$, $(15,15,15)$ u otros que tengan el mismo número en sus tres coordenadas.

I. ¿Qué tienen en común estos puntos en relación con su ubicación espacial?
II. Expresar cada uno de ellos como producto de un escalar por uno de los otros vectores.
III. Reconocer que expresiones de la forma

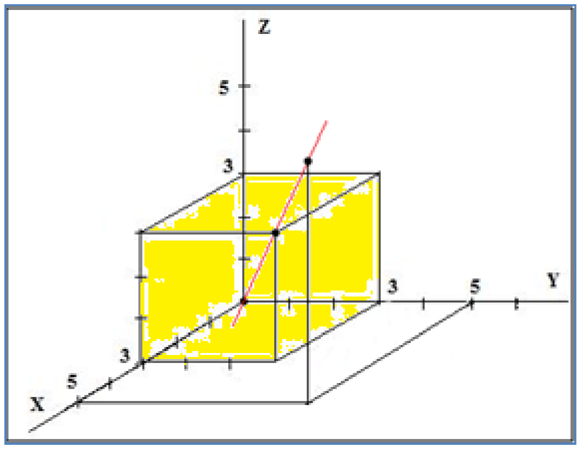
$$\vec{v}(t) = t(1,1,1) \text{ , o bien } \vec{v}(t) = t(5,5,5)$$

son ecuaciones vectoriales de la recta que pasa por los puntos de la forma (t,t,t) con t en los reales.

IV. Generalizar a la ecuación vectorial de una recta que pasa por el origen.
V. Generalizar la ecuación vectorial de una recta que pasa por un punto cualquiera del espacio y es paralela a una recta L que pasa por el origen.

Solución:

En la figura se observan los puntos (0,0,0) , (3,3,3) y (5,5,5).



I. Todos ellos son múltiplos del vector $(1,1,1)$.

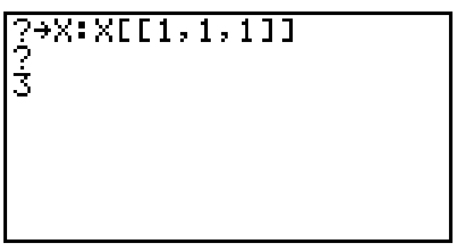
II. Los puntos dados pueden escribirse como:

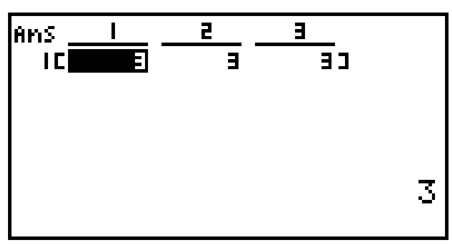
$$(0,0,0) = 0(1,1,1), \qquad (3,3,3) = 3(1,1,1), \quad (5,5,5) = 5(1,1,1).$$

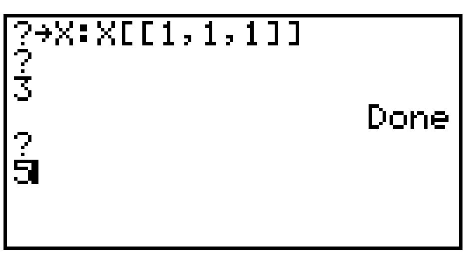
III. Los puntos de la recta pueden obtenerse de la ecuación vectorial:

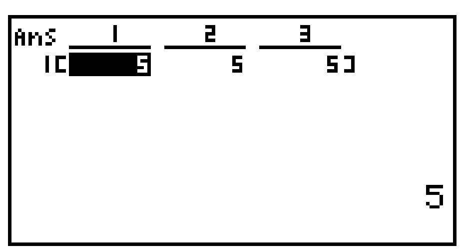
$$L\colon \vec{v}(t) = t(1,1,1),\ t \text{ es real.}$$

Usando la calculadora, tenemos:









IV. En general, la ecuación de la recta que pasa por el origen, puede escribirse, como:

$$L: \vec{v}(t) = t(a, b, c),\ \ t \text{ es real.}$$

Usando calculadora:

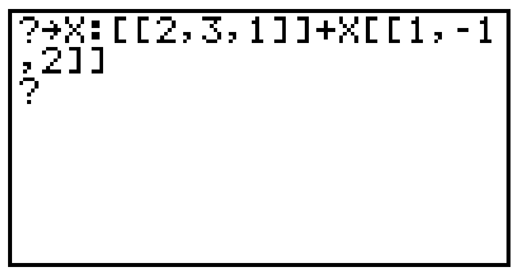
Los valores A, B, C ingresados en la calculadora deben ser valores numéricos.

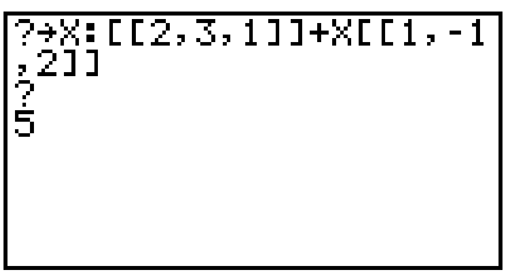
V. En general, la ecuación vectorial de la recta, es:

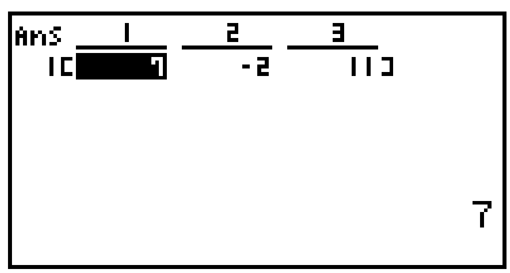
$$L: \vec{v}(t) = (A, B, C) + t(a, b, c),\ \ t \text{ es real.}$$

Donde (A, B, C) es un punto de la recta y (a, b, c) es un vector director.

Por ejemplo, usando la calculadora, podemos obtener puntos de la recta que pasa por el punto (2,3,1) con un vector director $(1, -1, 2)$.







Actividad 4

Conocen la ecuación vectorial y analítica de un plano en el espacio y consideran las condiciones de paralelismo entre planos.

Ejemplo A

I. Determinar valores para α y β, en la suma $\alpha(1,0)+\beta(0,1)$ que permitan obtener los puntos $(5,6); (0,9); (-9,4); (-3,-7); (\pi,\pi)$; y marcar estos puntos en un sistema de coordenadas.

II. ¿Existe algún punto del plano que no se pueda obtener por la suma $\alpha(1,0)+\beta(0,1)$, si no hay restricciones para los valores de α y β?

III. Elegir otro par de vectores cualesquiera $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ del plano XY; analizar si la suma de la forma $\alpha\vec{v}_1+\beta\vec{v}_2$, en que α y β toman cualquier valor numérico, permite obtener todos los puntos del plano. Establecer las restricciones para los valores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

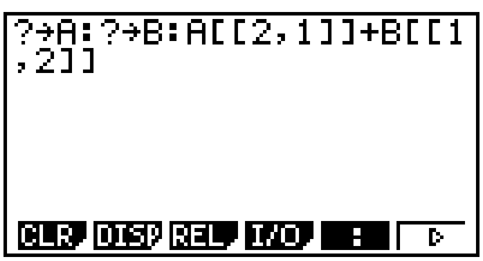
Solución:

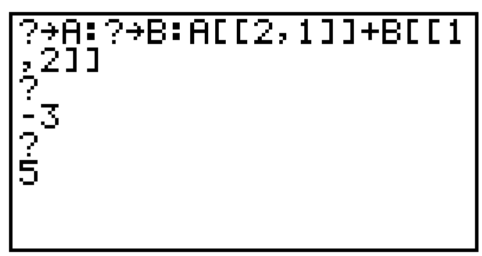
I. Por ejemplo si $\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(5,6)$ => $(\alpha,\beta)=(5,6)$ => $\alpha=5$, $\beta=6$.

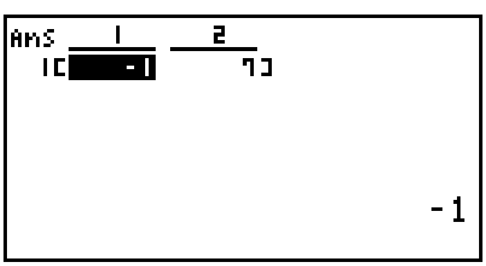
En general, si $\alpha(1,0)+\beta(0,1)=(a,b)$ => $(\alpha,\beta)=(a,b)$ => $\alpha=a$, $\beta=b$.

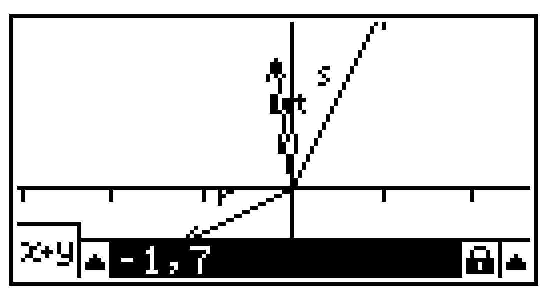
II. Como puede verse en el párrafo anterior, cualquier punto (a,b) del plano XY, define en forma única a α y a β.

III. Usando la calculadora podemos obtener, por ejemplo, puntos del plano generado por los vectores $\vec{v}_1=(2,1)$ y $\vec{v}_2=(1,2)$. La forma es la siguiente:









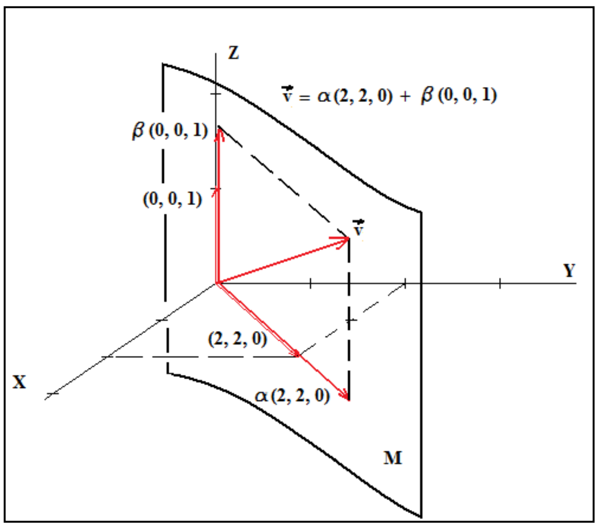
Ejemplo B

I. Caracterizar al plano que se define por $\alpha(2,2,0) + \beta(0,0,1) = \vec{v}$ en que α y β son dos números cualesquiera.

II. Estudiar la suma $\alpha\vec{v} + \beta(0,0,1)$ para cualquier valor de α y β, en que $\vec{v}$ es un vector del espacio tridimensional; ¿qué se obtiene?

III. Generalizar la ecuación vectorial de planos que pasan por el origen: $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{v}$ en que, si α y β son parámetros reales, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores del espacio tridimensional; establecer la restricción para $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Solución:



La ecuación del plano, generado por los vectores $(2,2,0)$ y $(0,0,1)$, es:

M: $\vec{v} = \alpha(2,2,0) + \beta(0,0,1)$,

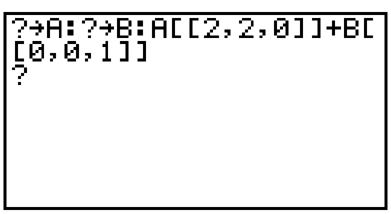
con α y β números reales.

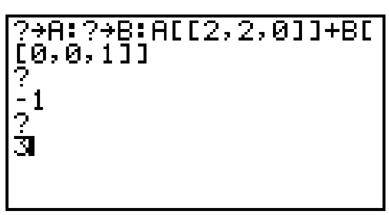
También puede escribirse, como:

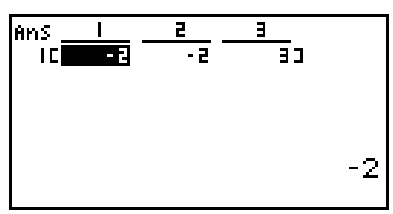
M: $x = y\,, z\epsilon\mathbb{R}$

Usando la calculadora podemos obtener puntos del plano M. Por ejemplo, para $\alpha = -1$ y $\beta = 3$,

tenemos: $\vec{v} = (-2, -2, 3)$.







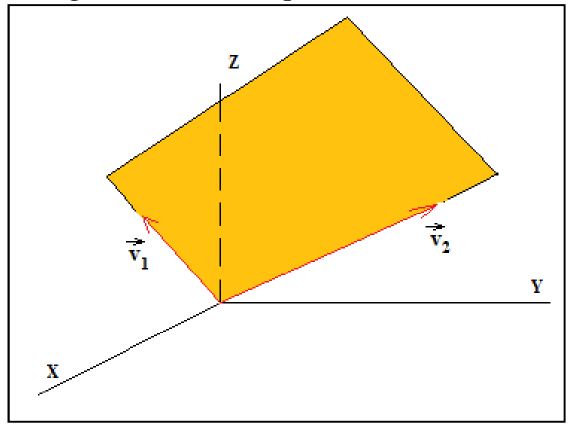
II. Se obtiene un plano que contiene al origen y al eje Z.

III. El gráfico mostrado en la figura muestra la forma generalizada del plano:

La ecuación vectorial del plano generado por los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, es :

$$\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{v}$$

en donde $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ no son nulos y no existe un número real k, tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$, (No pueden ser paralelos).



Ejemplo C

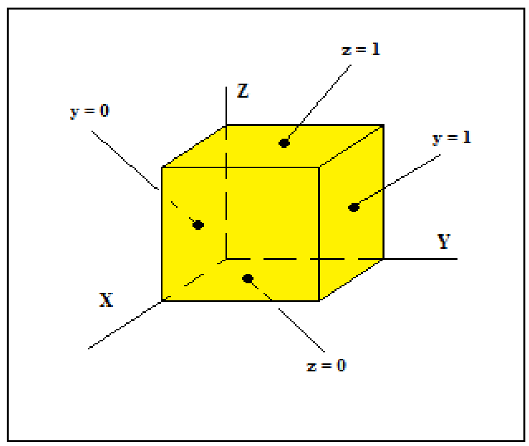
Situar un cubo con un vértice en el origen, de modo que las aristas se ubiquen sobre los ejes X,Y,Z. Determinar las ecuaciones vectoriales y analítica de los planos portadores de sus caras y de las rectas portadoras de sus aristas.

Solución:

En la figura se muestran las ecuaciones analíticas de algunos planos portadores de sus caras.

Por ejemplo, la ecuación vectorial del plano $z = 1$, es:

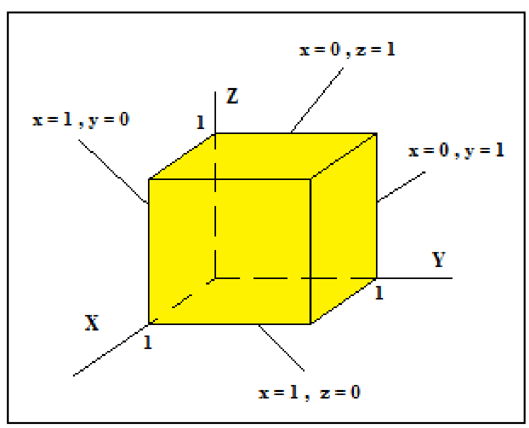
$$\vec{v} = (1,1,1) + \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0)$$



En la figura se muestran las ecuaciones analíticas de algunas rectas portadoras de sus aristas.

Por ejemplo, la ecuación vectorial de la recta $x = 1 , y = 0$, es:

$$\vec{v} = (1,0,0) + t(0,0,1)$$

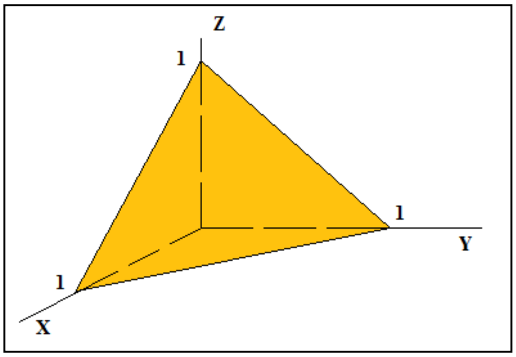


Ejemplo D

Determinar la ecuación analítica y vectorial del plano que intercepta a los ejes del sistema de coordenadas en los puntos $(1,0,0)$; $(0,1,0)$; $(0,0,1)$.

Solución:

El plano en el primer diedro se muestra en la figura siguiente:



La ecuación vectorial, es:

$M: \vec{R} = (1,0,0) + \alpha(1,0,-1) + \beta(0,1,-1)$,
α, β reales.

Actividad 5

Visualizan el cuerpo que se genera por traslación o rotación de una figura geométrica, lo caracterizan y calculan sus volúmenes y áreas.

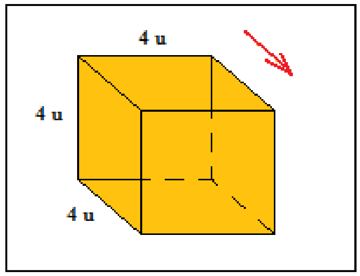
Ejemplo A

Suponer un cuadrado con uno de sus vértices en el origen, con dos de sus lados sobre los ejes de coordenadas y con una arista de 4 unidades de longitud.

I. ¿Qué se genera al trasladar este cuadrado por un vector $(0,0,4)$?
II. ¿Cuál es el volumen de este cuerpo?
III. ¿Cuál es el área total del cuerpo generado?
IV. Variar la posición del cuadrado de modo que se ubique centrado en el origen; calcular el volumen y el área total del cuerpo que se genera por la traslación por el vector $(0,0,-4)$.
V. Comparar con el caso anterior; establecer diferencias y semejanzas.
VI. Si el vector traslación fuera $(0,0,-8)$, ¿qué cuerpo se generaría y cuánto sería su volumen?
VII. ¿Cuál debiera ser el vector traslación que se aplique a este cuadrado para generar un paralelepípedo que tenga un volumen igual a 1000 unidades cúbicas?

Solución:

I. Se genera un cubo, como el de la figura siguiente:



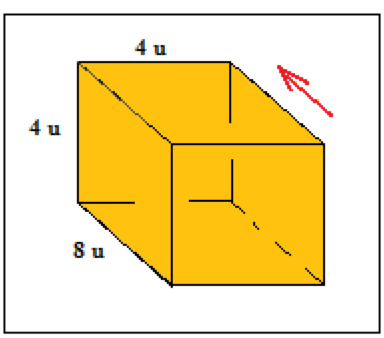
II. El volumen de este cuerpo, en unidades cúbicas, es:

III. El área del cuerpo, en unidades al cuadrado, es:

IV. Se obtienen los mismos resultados que en el caso anterior.

V. El cubo sólo cambia de posición en el espacio.

VI. La figura generada es la mostrada en la figura siguiente:



El volumen del sólido es:

$$V = 128\ u^3$$

VII. El vector de traslación debiese ser $(0,0,\pm 62.5)$.

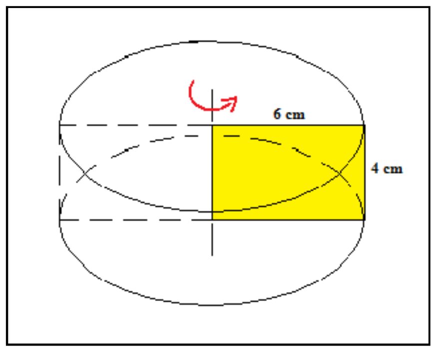
Ejemplo B

Imaginar que un rectángulo de lados 4 cm y 6 cm gira en torno a su lado menor:

I. Visualizar el sólido que se genera.
II. Calcular su volumen.
III. Comparar con el volumen del sólido que se obtiene si la rotación se hiciera en torno al lado mayor.
IV. Calcular las áreas de ambos sólidos.
V. Determinar las condiciones que debe satisfacer un rectángulo para que el volumen del sólido generado por rotación en torno a uno de sus lados sea igual al doble del volumen del sólido que se genera al rotar sobre el otro lado.

Solución:

I. El sólido que se genera, es:



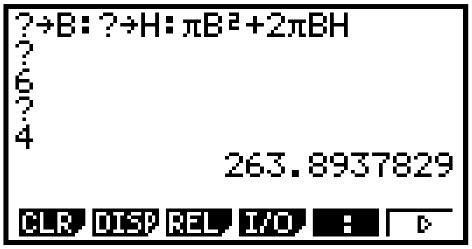
II. Su volumen es:

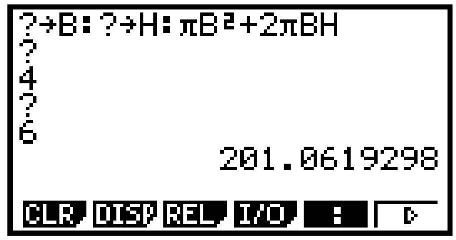
$$V = \pi b^2 h = \pi(6)^2(4) = 452.4 \ cm^2$$, (aproximadamente).

Usando calculadora, tenemos:

III. En este caso tendríamos:

IV. El área de ambos sólidos, es:





V. Para que se cumpla lo pedido, debe ocurrir que un lado del rectángulo debe ser el doble del otro.
Por ejemplo:

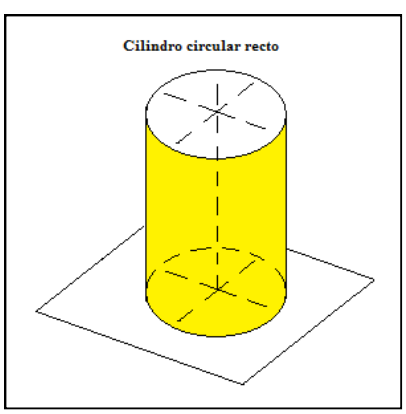
Ejemplo 6

Comparar entre el tipo de cuerpo que se genera por rotación con el que se puede generar por traslación.

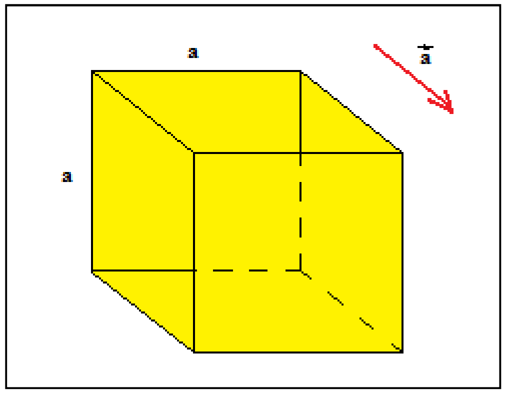
I. ¿Se puede generar un cono por traslación?
II. ¿Se puede generar un cilindro por traslación?
III. ¿Cómo se puede generar un cubo?
IV. ¿Se puede generar una pirámide por traslación, por rotación?

Solución:

I. No es posible.
II. Si como se muestra en el ejemplo de la figura siguiente:



III. La figura siguiente muestra la generación de un cubo por traslación:

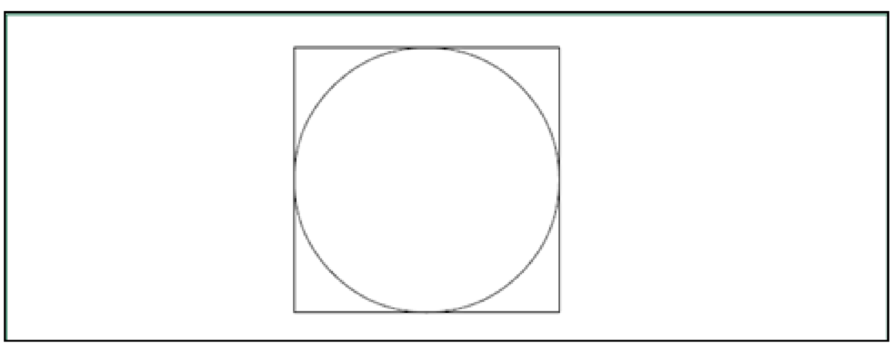


IV. No es posible.

La calculadora no dibuja figuras en tres dimensiones, pero puede calcular su volumen, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo D

Considerar una circunferencia inscrita en un cuadrado, como lo indica el dibujo que sigue:



I. Describir qué cuerpos se generan si ambas figuras rotan solidariamente en torno a una de las rectas que une los puntos medios de los lados opuestos del cuadrado.

II. Describir qué cuerpos se generan si ambas figuras se trasladan por un vector $(0,0,a)$ en que a es la medida del lado del cuadrado.

III. Calcular, en cada caso, la diferencia de volumen entre ambos cuerpos.

Solución:

I. En este caso se genera una esfera inscrita en un cilindro circular recto.

II. Se genera un cilindro circular recto inscrito en un cubo de lados a , si es que la figura dada está en el plano XY.

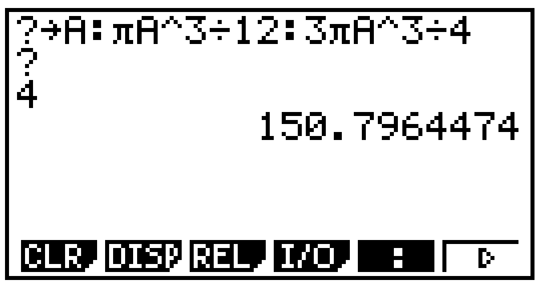
III. En el primer caso tenemos:

$$V = (\pi(a/2)^2)(a) - \frac{4\pi\left(\frac{a}{2}\right)^3}{3} = \frac{\pi a^3}{12}$$

En el segundo caso tenemos:

$$V = a^3 - (\pi(a/2)^2)(a) = \frac{3\pi a^3}{4}$$

Podemos usar calculadora, por ejemplo, para obtener los volúmenes anteriores si se conoce el valor numérico de a.



Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades que se proponen a continuación se complementan con algunos ejemplos. Para cada ejemplo se propone un conjunto de indicadores que importa tener en cuenta para evaluar el logro de los aprendizajes esperados por el alumno o alumna.

Estos indicadores son concordantes con los siguientes criterios de evaluación, ya descritos en la presentación de este programa:

- Resolución de problemas que involucren relaciones matemáticas.
- Desarrollo de habilidades de razonamiento matemático.
- Organización y estructuración de conceptos matemáticos.
- Comprensión y aplicación de procedimientos rutinarios.

Actividad 1

Calculan sumas y diferencias de vectores en el plano y en el espacio; determinan el producto de un escalar por un vector.

Ejemplo A

Calcular y representar en un sistema de coordenadas:

$(2, -3) + (5, 0) =$

$(0, 0) - 3\,(-1, 0) =$

$(a, b) + (3, c) =$

$(a, 3, b) - (2, -3, -b) =$

Observar si establecen la relación entre la operatoria algebraica, que no ofrece gran dificultad, con la representación gráfica de la suma o diferencia.

Ejemplo B

Considerar los vectores $(2,4)$; $(3, 9)$; $(6, 36)$; $(\frac{1}{2}, 1)$; $(7,14)$.

Seleccionar los pares de vectores tales que uno se puede expresar como producto del otro vector por un escalar.

Observar si averiguan en forma mental o por cálculos escritos los escalares que permiten transformar un vector en otro.

Ejemplo C

Proponer tres vectores del espacio tales que cada uno se pueda expresar como ponderados de los otros dos. Escribir los seis casos que resultan.

Observar la manera de generar los tres vectores; si optaran por generarlos a partir de uno que ponderan por número enteros, ¿qué dificultades se observan al escribir los seis casos que resultan?

Actividad 2

Determinan la ecuación vectorial de la recta en el plano y en el espacio.

Ejemplo A

Determinar la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y es paralela al vector $(5, 0)$.

Observar si la solución es desde lo algebraico y si distinguen el vector posición del vector dirección y los utilizan adecuadamente para proponer la ecuación; o bien, si recurren al gráfico para resolverlo.

Ejemplo B

Escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $(0,0)$ y es paralela a la recta $x + y = 1$.

Observar si recurren a un gráfico para resolver el problema, o bien, identifican desde la expresión algebraica que se trata de expresar vectorialmente la recta $x + y= 0$.

Ejemplo C

a) Escribir la ecuación vectorial de la recta $y = 3x$.

b) Escribir la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $(0,1)$ y $(0,3)$.

c) Determinar tres puntos que pertenezcan a la recta $\vec{v}\,(t) = (4, -2) + t(4,-2)$ con t real.

d) Escribir la ecuación de una recta que pasa por el punto $(3,3)$ y es paralela a la recta $y = 2x - 4$.

Observar si recurren a un gráfico a mano alzada para identificar las rectas y las condiciones planteadas o si sólo les basta la información de la expresión algebraica.

Bibliografía

Berlanga, Ricardo; Bosch, Carlos; Rivaud, Juan José (1999). *La matemática, el perejil de todas las salsas. Ciencia para todos.* Fondo de Cultura Económica. México.

Chevallard, Yves; Bosch, Mariana; Gascon, Joep (1997). *Estudiar matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* Editorial Síntesis. España.

De Guzmán, Miguel; Colera, José (1989). *Matemática I COU.* Anaya. España.

De Guzmán, Miguel; Colera, José (1989). *Matemática II COU.* Anaya. España.

De la Peña, José Antonio (1999). *Álgebra en todas partes. Ciencia para todos.* Fondo de Cultura Económica. México.

Guillen, Michael (1995). *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo.* Temas de debate. España.

Paulos, John Allen (1999). *Érase una vez un número.* Libros para pensar la ciencia. España.

Paulos, John Allen (1997). *El hombre anumérico.* Libros para pensar la ciencia. España.

Paulos, John Allen (1998). *Más allá de los números.* Libros para pensar la ciencia. España.

Perry, Patricia y otros (1996). *Matemáticas, Azar, Sociedad.* Conceptos básicos de estadística. Grupo Editorial Iberoamérica. Colombia.

Peterson, Ivars (1991). *El turista matemático.* Alianza Editorial. España.

Stewart, Ian (1996). *Juega Dios a los dados*, Grijalbo Mandadori. España.

Stewart, Ian (1998). *De aquí al infinito.* Drakontos. España.

Graficadores en internet
http://www.mfsoft.com/equationgrapher/
http://graphmataica.com/

Sitios en internet
(Es posible que algunas direcciones hayan dejado de existir o se modifiquen después de la publicación de este programa).

http://www.enlaces.cl
http://www.ciudadfutura.com/juegosmensa
http://www.dim.uchile.cl/
http://www.nalejandria.com/forms/matemas.htm
http://www.mat.puc.cl/ socmat
http://rsme.uned.es
http://fermat.usach.cl/ somachi/index.html
http://roble.pntic.mec.es/ jcamara/websup1.htm
httpo://nti.educa.rcanaria.es/usr/matematicas
http:/members.xoom.com/pmatematicas
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/
http://www.redemat.com