

Unidad 2

Funciones potencia, logarítmica y exponencial

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Analizan gráfica y analíticamente algunos fenómenos o situaciones que se modelan por una función potencia y estudian estas funciones considerando la paridad del exponente, variaciones en los valores de los parámetros, restricciones en el dominio y explicitación del recorrido.

Ejemplo A

Expresar el área y el volumen de un cubo en términos de la arista; construir una tabla de valores, el gráfico de la función correspondiente y determinar los valores posibles que puede tomar la variable independiente.

Solución:

Consideramos un cubo de arista igual a x . ¿Cuál es el área total y el volumen de un cubo cuya arista tiene los valores $x = 1$, $x = 1.5$, $x = 2$, $x = 2.5$, $x = 3$, $x = 3.5$ y $x = 4$ cms? En las siguientes tablas se muestran los valores de $y_1 = \text{área total}$ e $y_2 = \text{volumen}$ del cubo cuando la “variable” x toma los valores dados.

x	y1	y2
1	6	1
1.5	13.5	3.375
2	24	8
2.5	37.5	15.625

1

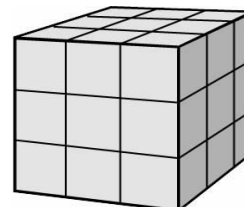
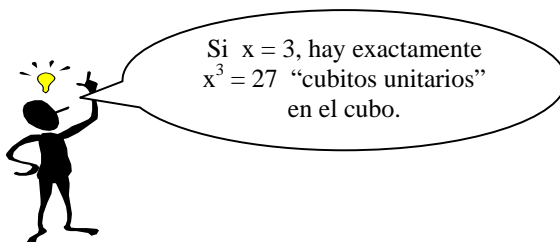
x	y1	y2
2.5	37.5	15.625
3	54	27
3.5	73.5	42.875
4	96	64

4

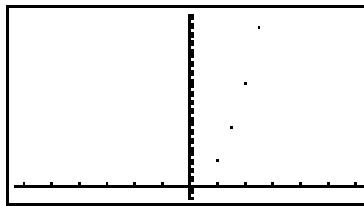
Es de interés encontrar una expresión para el área total y el volumen del cubo en función de la longitud de su arista x .

Como el área de cada una de las 6 caras del cubo es x^2 , el área total del cubo es $A(x) = 6x^2$.

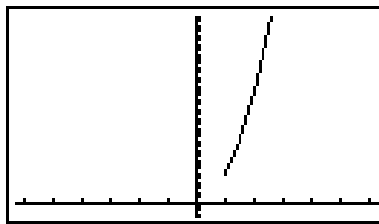
El volumen del cubo es $V(x) = x^3$ que corresponde a la cantidad de “cubitos unitarios” que contiene el cubo de arista x .



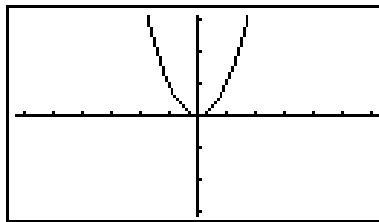
La siguiente gráfica muestra los puntos $(x, A(x))$ para $x = 1, x = 1.5, x = 2$ y $x = 2.5$.



Esta gráfica es notoriamente diferente si consideramos valores continuos de la variable x en el intervalo $[1, 2.5]$, en este caso el gráfico de los puntos $(x, A(x))$ se observa así:

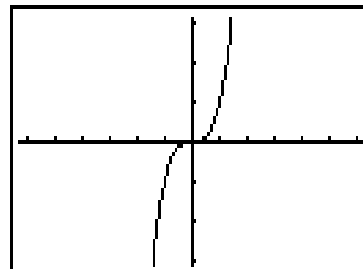
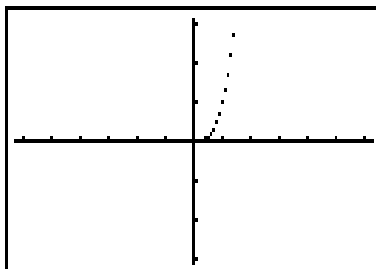


Los dos últimos gráficos corresponden a restricciones a los dominios $D_1 = \{1, 1.5, 2, 2.5\}$ y $D_2 = [1, 2.5]$ de la función $y = A(x) = 6x^2$ cuyo dominio es el conjunto de los números reales y su gráfico es:



Observe que dado el contexto del problema, la variable independiente x es positiva, es decir, la función $y = A(x) = 6x^2$ tiene dominio \mathbb{R}^+ . Y la variable dependiente y también alcanza valores positivos; en consecuencia, el recorrido de la función A es \mathbb{R}^+ .

Esta observación también es válida para la función $y = V(x) = x^3$ cuyo dominio es el conjunto \mathbb{R} de los números reales. Los gráficos siguientes corresponden a la función V y a su restricción al dominio \mathbb{R}^+ .

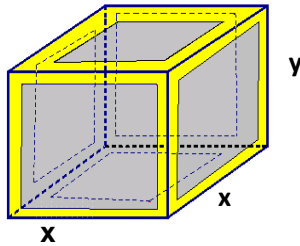


Ejemplo B

Se desea hacer una caja de cartón con forma de paralelepípedo recto de base cuadrada, que tenga el mayor volumen posible, sabiendo que se dispone de 1.2 m. de una cinta decorativa para pegarla en todas las aristas y que se quiere ocupar toda la cinta.

Solución:

Consideremos una caja de base cuadrada, y llamemos x a la medida de la arista de la base del cuadrado e y a la altura de la caja.

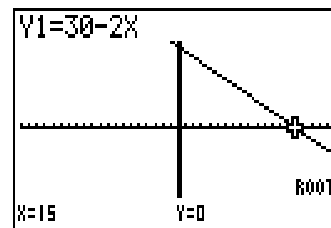
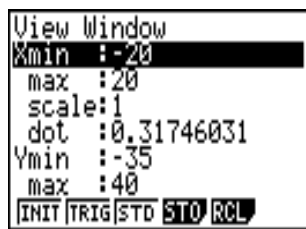


Como se dispone de 1,2 m. de cinta para pegar en todas las aristas, entonces:

$$8x + 4y = 120 \quad \Leftrightarrow \quad y = 30 - 2x \quad \text{donde } x > 0, y > 0 \text{ y se han expresado en cm.}$$

Es importante que los alumnos determinen distintos valores de x e y que cumplan con la condición pedida.

Para lograr éste objetivo, graficamos con una ventana adecuada la función $y = 30 - 2x$



De acuerdo a la gráfica obtenida, es posible determinar que los valores de la variable y están restringidos al intervalo $]0, 30 [$, como así también los valores de x están en el intervalo $]0, 15 [$

Podemos ahora construir una tabla de valores para lo cual fijamos previamente las entradas de la tabla:

Table Settings
X

Start: 0
End : 30
Step : 2

X	Y1
0	30
2	26
4	22
6	18

FORM DEL ROW EDIT G-COM G-PLT

X	Y1
8	14
10	10
12	6
14	2

FORM DEL ROW EDIT G-COM G-PLT 14

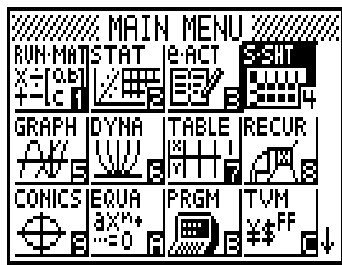
X	Y1
16	-2
18	-6
20	-10
22	-14

FORM DEL ROW EDIT G-COM G-PLT 22

Analizando estas tablas, determinamos que a partir de $x = 16$ los valores de y son negativos lo cual contradice las restricción de $y > 0$

El volumen del paralelepípedo es $V = x^2 y$; podemos para cada caso, determinar el volumen con el fin de encontrar las dimensiones de la caja que nos entrega el mayor de éstos.

En menú S-SHT, ventana hoja de cálculo es posible obtener el volumen para cada una de las dimensiones antes observadas.



SHEE	A	B	C	D
1	2	26	104	
2	4	22	352	
3	6	18	648	
4	8	14	896	
5	10	10	1000	

D1:D999
EDIT DEL INS CLR D

SHEE	A	B	C	D
5	10	10	1000	
6	12	6	864	
7	14	2	392	
8			0	
9				

FILE EDIT DEL INS CLR D

La columna C de la tabla nos muestra el volumen, para los valores dados y podemos observar que el mayor volumen se obtiene para cuando tanto x como y mide 10 cm.

Ahora, si consideramos que el volumen de la caja es $V = x^2y$ donde $y = 30 - 2x$, entonces es posible expresar este volumen en función del lado x del cuadrado de la base de la caja

$$V = x^2(30 - 2x)$$

Esta función la podemos graficar con una ventana de visualización adecuada:

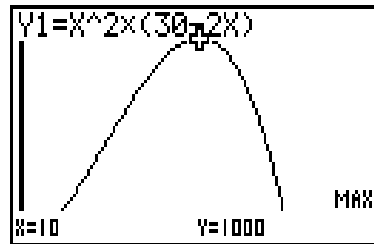


Gráfico de la función
Volumen

La gráfica anterior muestra que el volumen de la caja es máximo si el lado x del cuadrado de la base es $x=10$ y dado que la altura de la caja es $y=30-2x$, entonces la altura es $y=10$.

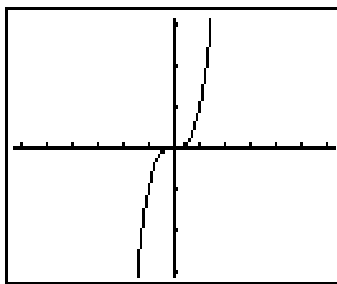
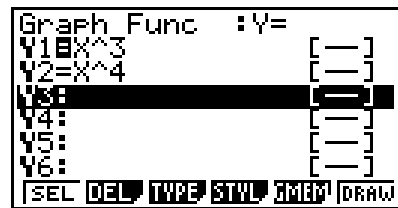
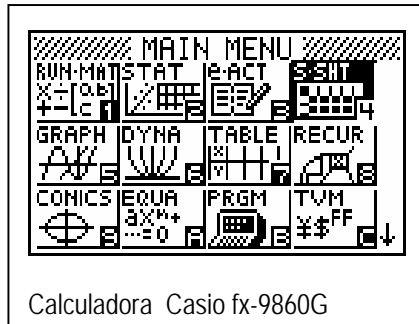
Por tanto, la caja de mayor volumen que se puede construir, disponiendo de 120 cm. de cinta decorativa para pegar todas las aristas, es un cubo, cuya arista mide 10 cm.

Ejemplo C

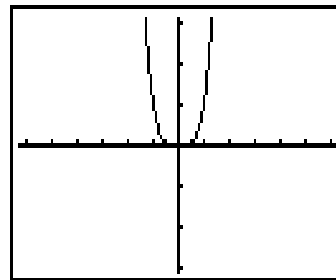
- I. Graficar las funciones $y = x^3$; $y = x^4$; comparar ambos gráficos.
- II. Graficar funciones de la forma $y = ax^2$; $y = ax^4$; considerar valores de a positivos y negativos.
- III. Graficar funciones de la forma $y = ax^3$; $y = ax^5$; considerar valores de a positivos y negativos.

Solución:

- I. En el menú de la calculadora gráfica escogemos el icono GRAPH para graficar las funciones $y = f(x) = x^3$; $y = g(x) = x^4$.



$$y = f(x) = x^3$$

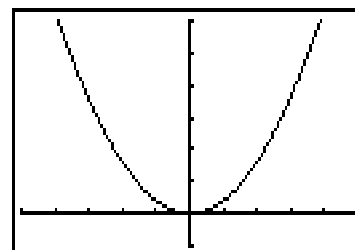
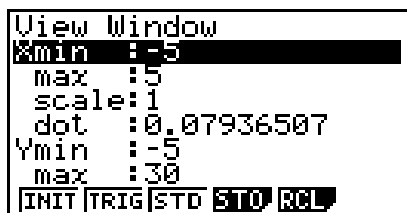


$$y = g(x) = x^4$$

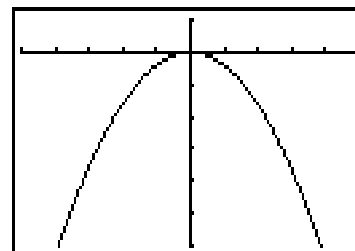
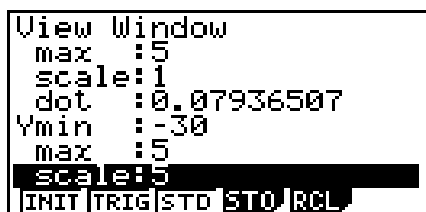
Una simple observación de los gráficos anteriores, nos llevan a concluir que:

- Ambas funciones tienen dominio al conjunto IR de los números reales.
- Los recorridos son diferentes: $Rec(f) = IR$ y $Rec(g) = IR_0^+$
- La función g alcanza los mismos valores en x y en $-x$, es decir, $g(-x) = g(x)$. Esto no sucede con la función f que tiene la propiedad $f(-x) = -f(x)$.

- II. i) Grafiquemos ahora $f_1(x) = 2x^2$ y $f_2(x) = -2x^2$. Para observar mejor estas gráficas adaptamos la ventana de visualización de la manera siguiente:



$$f_1(x) = 2x^2$$



$$f_2(x) = -2x^2$$

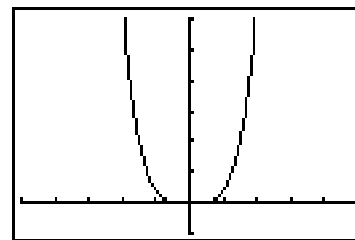
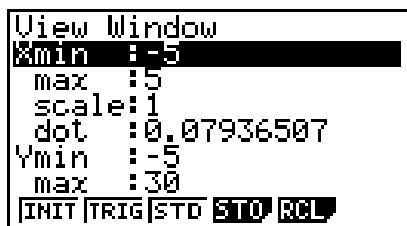
Observamos que:

- Los gráficos de ambas funciones *cuadráticas* son parábolas con vértice en el origen (0,0); en el primer caso, abre hacia arriba y en el segundo caso abre hacia abajo.
- Ambas parábolas son simétricas con respecto al eje Y; esto se expresa así: $f(x) = f(-x)$, para todos los x del dominio \mathbb{R} . Una función que tiene esta característica se llama *par*.

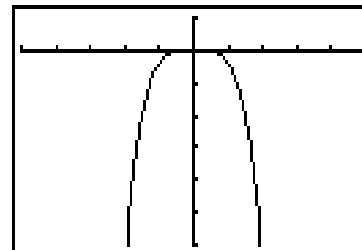
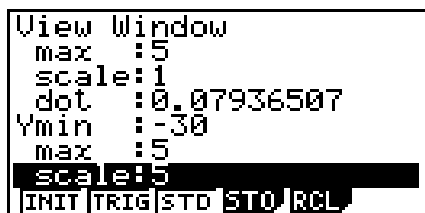
Se puede enunciar y demostrar que:

- Si $a > 0$, la función cuadrática $f(x) = ax^2$ es una función par y su gráfica es una parábola que abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la función cuadrática $f(x) = ax^2$ es una función par y su gráfica es una parábola que abre hacia abajo.

ii) Grafiquemos ahora $g_1(x) = 2x^4$ y $g_2(x) = -2x^4$ con las mismas ventanas de visualización de las funciones anteriores:



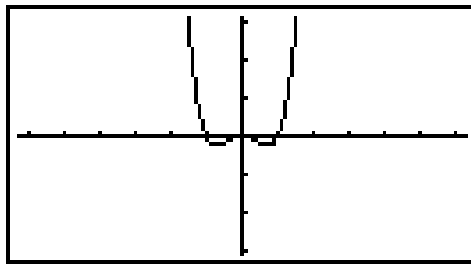
$$g_1(x) = 2x^4$$



$$g_2(x) = -2x^4$$

Observamos que:

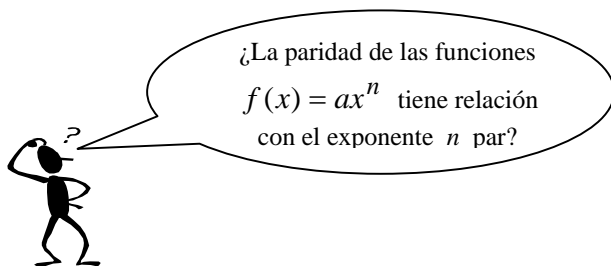
Los gráficos de ambas funciones *cuárticas* son parábolas con vértice en el origen (0,0); en el primer caso, abre hacia arriba y en el segundo caso abre hacia abajo. Sin embargo, es necesario precisar que el gráfico de una función cuártica o polinómica de grado 4, no siempre es una parábola. Por ejemplo, el gráfico de $f(x) = x^4 - x^2$ es el siguiente:



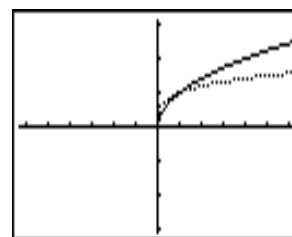
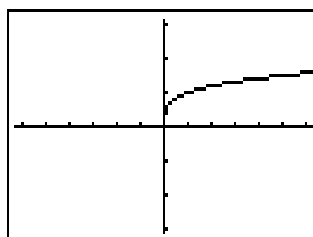
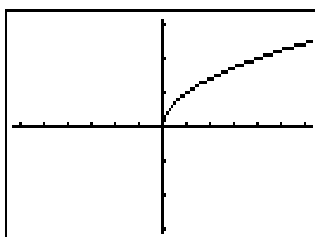
$$f(x) = x^4 - x^2$$

Las funciones g_1 y g_2 son simétricas con respecto al eje Y, es decir, son funciones pares. En general, podemos enunciar y demostrar que:

- Si $a > 0$, la función $f(x) = ax^4$ es una función par, con recorrido \mathbb{R}_0^+ y su gráfica es una parábola que abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la función $f(x) = ax^4$ es una función par, con recorrido \mathbb{R}_0^- y su gráfica es una parábola que abre hacia abajo.

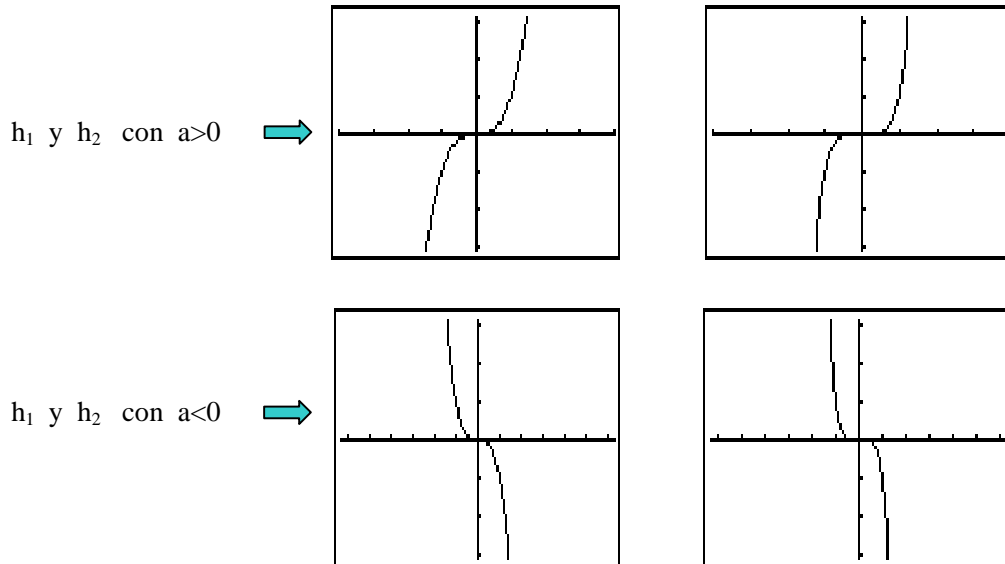


¿Qué sucede con las gráficas de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$, funciones cuya expresión tiene raíces con índice par?



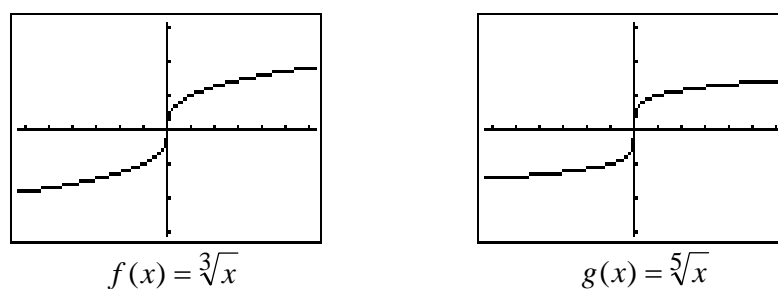
Podemos constatar que los gráficos ocupan sólo el primer cuadrante puesto que al ser raíces con índice un número par, el dominio de estas funciones es \mathbb{R}_0^+ ; en estos casos no tiene sentido preguntarse por la paridad de estas funciones.

III. Estudiemos las funciones $h_1(x) = ax^3$ y $h_2(x) = ax^5$ para valores de a positivos y negativos.



Estas funciones tienen dominio \mathbb{R} y recorrido \mathbb{R} ; sus gráficos son muy parecidos y se verifica la condición $h(-x) = -h(x)$, para todos los x del dominio \mathbb{R} . Esta condición caracteriza a las funciones llamadas *impares* y se dice que estas funciones son simétricas con respecto al origen.

A diferencia de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$, con dominio \mathbb{R}_0^+ , mostradas antes, las funciones con índice impar $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = \sqrt[5]{x}$ tienen dominio \mathbb{R} y sus gráficas son:



Observe que estas funciones son impares, esto es, sus gráficas son simétricas con respecto al origen.

Ejemplo D

En un mismo sistema de coordenadas, graficar las siguientes funciones:

I $y=x^5$, $y=(x+1)^5$, $y=(x-2)^5$

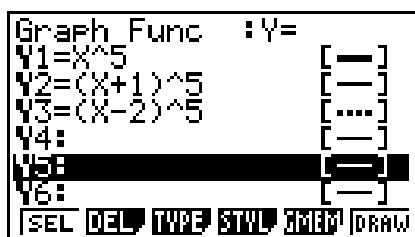
II $y=x^5$, $y=x^5+1$, $y=x^5-2$

III Analizar el rol que juegan los parámetros b y c en las expresiones de la forma

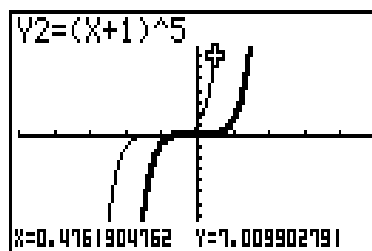
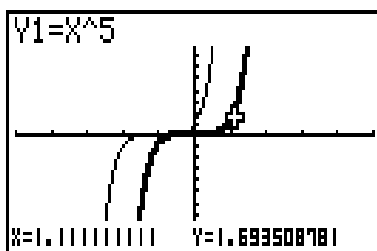
$$y=(x+b)^n, \quad y=x^n+c$$

Solución:

I Ingresamos en el menú GRAPH las funciones $y=x^5$, $y=(x+1)^5$ e $y=(x-2)^5$

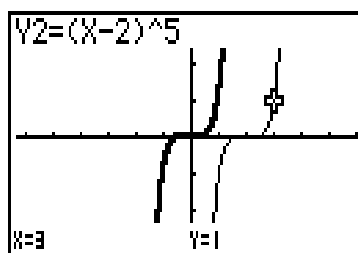
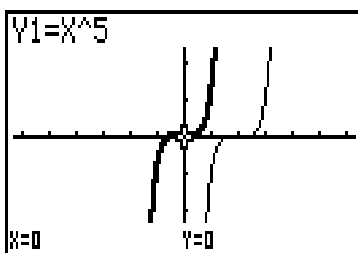


Seleccionamos las funciones y_1 e y_2 y graficamos con DRAW:



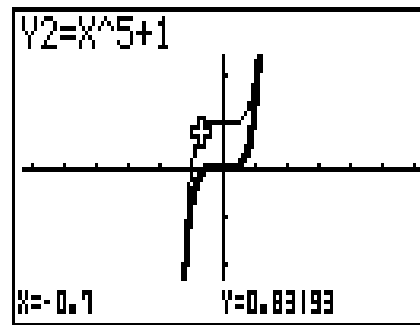
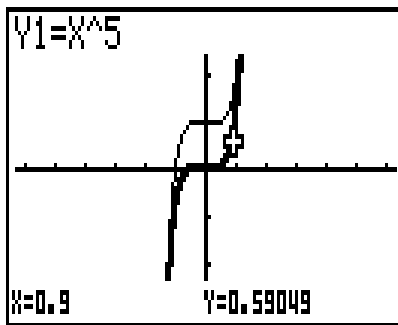
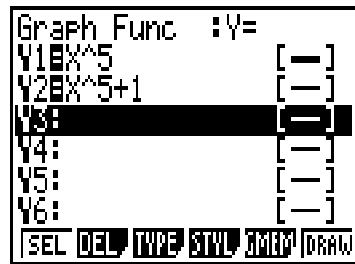
Al visualizar ambas funciones en una misma pantalla, podemos observar que el gráfico de la función $y=(x+1)^5$ es equivalente a un desplazamiento de la gráfica de $y=x^5$, una unidad hacia la izquierda.

Si ahora en GRAPH se selecciona las funciones $y=x^5$, $y=(x-2)^5$ se obtiene:



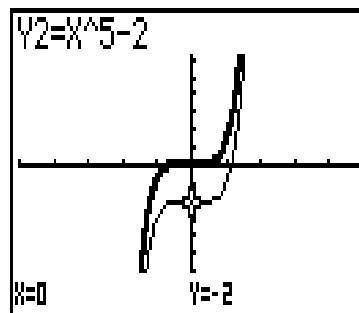
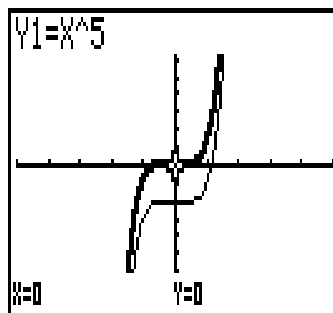
El gráfico de la función $y = (x - 2)^5$ es equivalente a un desplazamiento de la gráfica de $y = x^5$, dos unidades hacia la derecha.

II En el menú de gráfica ingresemos las funciones $y = x^5$, $y = x^5 + 1$



El gráfico de la función $y = x^5 + 1$ es equivalente a un desplazamiento de la gráfica de $y = x^5$, una unidad hacia arriba.

En forma análoga, si graficamos las funciones $y = x^5$ e $y = x^5 - 2$



Podemos observar que el gráfico de la función $y = x^5 - 2$ es equivalente a un desplazamiento de la gráfica de $y = x^5$, dos unidades hacia abajo.

III Como consecuencia de los gráficos obtenidos en los puntos anteriores podemos concluir que:

- a) En la ecuación $y=(x+b)^n$, el parámetro b representa el desplazamiento horizontal de la gráfica de $y=x^n$
- Si $b > 0$, la curva $y=x^n$ se ha desplazado b unidades hacia la izquierda.
 - Si $b < 0$, la curva $y=x^n$ se ha desplazado $|b|$ unidades hacia la derecha.
- b) En la ecuación $y=x^n+c$, el parámetro c representa el desplazamiento vertical de la gráfica de $y=x^n$
- Si $c > 0$, la curva $y=x^n$ se ha desplazado c unidades hacia arriba.
 - Si $c < 0$, la curva $y=x^n$ se ha desplazado $|c|$ unidades hacia la izquierda.

El uso de la calculadora gráfica debería motivar al alumno para continuar con el estudio de los dominios, recorridos, paridad y gráficas de otras funciones polinomiales, irracionales y racionales sencillas como por ejemplo, $y=x^2+x$, $y=(x-2)(2x+4)$, $y=\sqrt{x-2}$, $y=\sqrt{x}+c$, $y=\sqrt{cx}$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x-4}$, $y=\frac{1}{x^2-4}$.

Actividad 2

Estudian y relacionan las propiedades y las gráficas de las funciones logarítmica y exponencial en distintas bases.

Ejemplo A

Supongamos que se dispusiera de una cartulina de 1 mm de grosor que se pudiera doblar sucesivamente de modo que cada doblez se hiciera sobre el anterior:

I ¿Cuál es la expresión matemática que indica la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar esta expresión.

II ¿Qué altura alcanzaría el papel doblado si se hiciesen 5, 10, 15, 20 dobleces?

III Si en lugar de duplicar la altura en cada doblez, ésta se triplicara, ¿cuál es, en ese caso, la expresión matemática que expresa la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar la relación en el mismo sistema de coordenadas del gráfico anterior.

IV Y, si la altura aumentase según potencias de 10, ¿cuál es el modelo matemático que expresa la relación entre la altura del papel doblado y el número de dobleces? Graficar la relación en el mismo sistema de coordenadas del gráfico anterior.

V Comparar los tres gráficos y señalar sus características.

VI En el caso que la altura se duplica en cada doblez, ¿cuántos dobleces son necesarios para obtener una altura de 250 metros aproximadamente?

VII Y, si se quisiera una altura de 800 metros, en el caso que la altura se triplica con cada doblez, ¿cuántos dobleces son necesarios?

VIII Y, si la altura aumenta en potencias de 10, y se quiere una altura de 500 metros, ¿cuántos dobleces son necesarios?

Solución:

I. Construyamos una tabla con x el número de dobleces e $y = f(x)$ la altura del papel:

Con 1 doblez, $f(1) = 2$ mm de altura

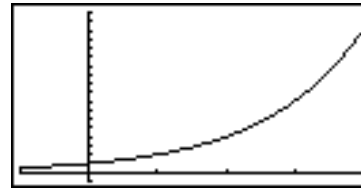
Con 2 dobleces, $f(2) = 2^2 = 4$ mm de altura

Con 3 dobleces, $f(3) = 2^3 = 8$ mm de altura

x	$y = f(x)$
1	2
2	4
3	8
4	16

La expresión matemática que indica la relación entre la altura del papel doblado $y_1 = f(x)$ y el número x de dobleces es $y_1 = f(x) = 2^x$

Usamos la calculadora para graficar $f(x) = 2^x$ →



II. Para llegar a la respuesta bastará usar la calculadora y evaluar la función $f(x) = 2^x$ (de la parte I) para los valores $x = 5$, $x = 10$, $x = 15$ y $x = 20$:

x	y1
5	32
10	1024
15	32768
20	1.048576

Con 5 dobleces, $f(5) = 2^5 = 32$ mm = 3,2 cm de altura

Con 10 dobleces, $f(10) = 2^{10} = 1.024$ mm = 102,4 cm altura

Con 15 dobleces, $f(15) = 2^{15} = 32.768$ mm = 3.276,8 cm = 32,768 m de altura

Con 20 dobleces, $f(20) = 2^{20} = 1.048.576$ mm = 104.857,6 cm = 1.048,576 m de altura

Observe la rapidez con que crecen los valores $f(x)$; la calculadora entrega el valor aproximado de $f(20)$ y además lo entrega con notación científica:

$$f(20) = 1,04 \text{ E}6 \text{ que corresponde a } 1,04 * 10^6.$$

La función $f(x) = 2^x$ no sólo se puede evaluar para valores enteros positivos de x :

$$2^{-4} = 0.0625$$

$$2^{\sqrt{2}} = 2.665144143$$

$$2^{0.5} = 1.414213562$$

$$2^{\pi} = 8.824977827$$

Además, los valores $f(x)$ que se obtienen son siempre positivos. Por lo tanto, el dominio de f es \mathbb{R} y el recorrido de f es \mathbb{R}^+ .

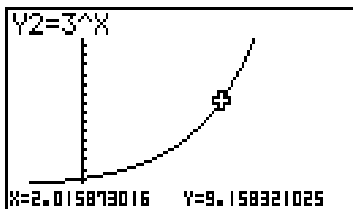
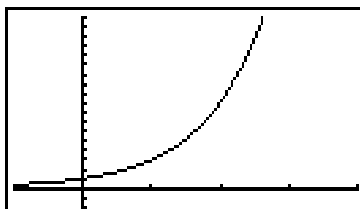
III. En este caso, con 1 doblez, $f(1) = 3$ mm de altura

con 2 dobleces, $f(2) = 3^2 = 9$ mm de altura

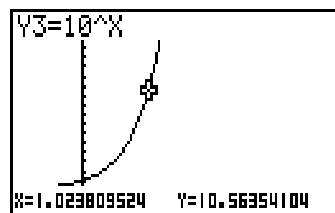
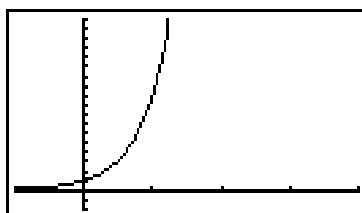
con 3 dobleces, $f(3) = 3^3 = 27$ mm de altura

La expresión matemática que indica la relación entre la altura del papel doblado $y = f(x)$ y el número x de dobleces es $y = f(x) = 3^x$

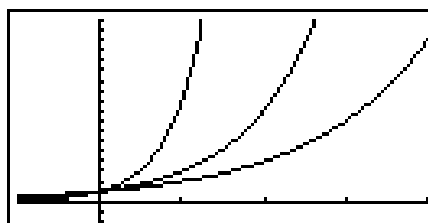
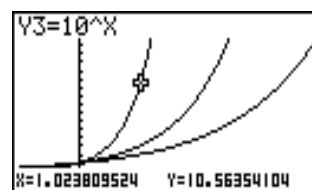
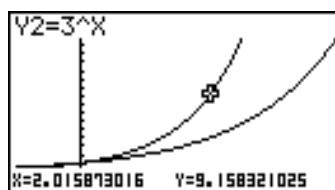
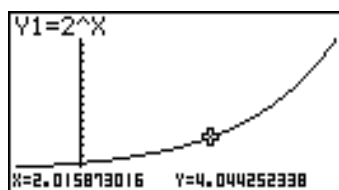
Graficamos con la calculadora:



IV. En este caso la expresión matemática es $y = f(x) = 10^x$. Usamos la calculadora para graficar:



V. Observemos los gráficos siguientes y tratemos de sacar conclusiones.

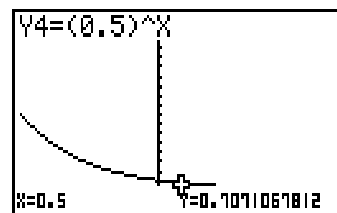
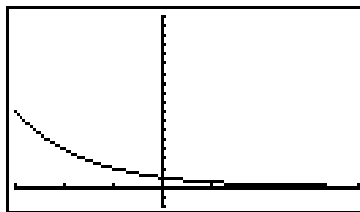


- Las tres funciones exponenciales $y_1 = 2^x$, $y_2 = 3^x$ e $y_3 = 10^x$ tienen dominio el conjunto \mathbb{R} de los números reales.
- Estas funciones alcanzan sólo valores positivos; en consecuencia tienen como recorrido a \mathbb{R}^+ .
- Las tres funciones son estrictamente crecientes.
- Estas funciones crecen muy rápidamente y el crecimiento es mayor cuando la base en la expresión de la función, es un número mayor.

Surgen varias interrogantes, a saber,



¿Toda función exponencial $f(x) = a^x$ tiene las características mencionadas? ¿La base a puede ser cualquier número real? La calculadora nos ayuda a encontrar algunas respuestas; por ejemplo, grafiquemos $y_4 = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



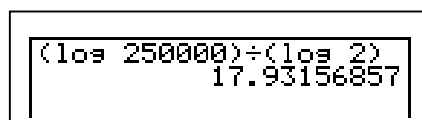
VI. Una altura de aprox. 250 metros corresponde a $250 * 10^3 = 250.000$ mm.; luego el planteamiento de este problema es ¿para cuál valor de x , $y_1 = 250.000$?, es decir, tenemos que resolver la ecuación exponencial:

$$2^x = 250.000$$

Aplicamos logaritmo en base 2 para obtener $x = \log_2(250.000) \approx 17,93156$

Las calculadoras traen incorporado dos sistemas de logaritmos, los logaritmos comunes y los logaritmos naturales. El teorema de cambio de base nos ayuda a obtener los valores de otros logaritmos:

$$\log_2(250.000) = \frac{\log(250.000)}{\log(2)}$$

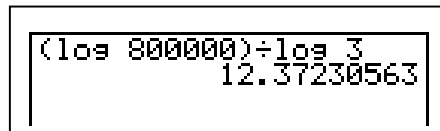


Por lo tanto, la respuesta a la interrogante es que son necesarios aproximadamente 18 dobleces.

VII Una altura de 800 metros corresponde a $800 * 10^3 = 800.000$ mm.; luego el planteamiento de este problema en este caso es ¿para cuál valor de x , $y^3 = 800.000$?, es decir, la ecuación exponencial que se debe resolver es:

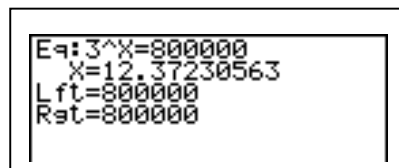
$$3^x = 800.000$$

Aplicamos logaritmo en base 3 para obtener $x = \log_3(800.000) \approx 12,37230$



En consecuencia, son necesarios 12 dobleces para obtener una altura de aproximadamente 800 metros.

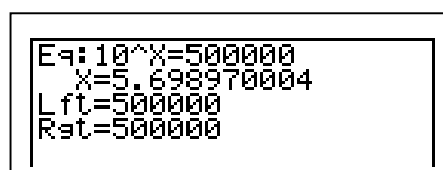
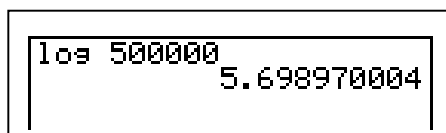
La calculadora puede resolver esta ecuación directamente; se escoge EQUA en el menú:



VIII En este caso, una altura de 500 metros corresponde a $500 * 10^3 = 500.000$ mm., y el planteamiento del problema es ¿para cuál valor de x , $y^3 = 500.000$?, es decir, tenemos que resolver la ecuación exponencial:

$$10^x = 500.000$$

Ahora es necesario aplicar el logaritmo común (o decimal, aquel cuya base es 10) para obtener $x = \log(500.000) \approx 5,69897$





¿Para cada base $a \in \mathbb{R}$ existe una función logaritmo? No; la base debe ser positiva y distinta de 1.

La función $g(x) = \log_a(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ tiene dominio \mathbb{R}^+ y recorrido \mathbb{R} ; es la “inversa” de $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ en el sentido siguiente:

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{y} \quad \log_a a^u = u$$

Ejemplo B

Calcular el capital final que se obtiene al cabo de 10 meses, al depositar 4 millones de pesos a un interés mensual de 2,5%.

Solución:

Si el capital inicial es $C_i = 4.000.000$ de pesos y el capital mensual es de 2,5%, entonces el primer mes se tendrá un capital final de :

$$4.000.000 + 4.000.000 \times \frac{2,5}{100} = 4.000.000 \left(1 + \frac{2,5}{100} \right)$$

```
4000000(1+2.5÷100)
4100000
□
JUMP DEL FMT MATP
```

El capital en el primer mes es de 4.100.000 de pesos.

De igual forma en el segundo mes es de $4.100.000 + 4.100.000 \times \frac{2,5}{100}$

```
4000000(1+2.5÷100)
4100000
4100000×2.5÷100
102500
4100000+102500
4202500
□
JUMP DEL FMT MATP
```

El capital en el segundo mes es de 4.202.500 de pesos.

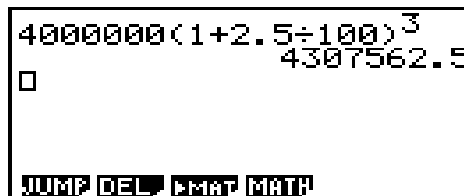
Con el apoyo de la calculadora es posible obtener los valores necesarios para completar la tabla siguiente:

Nº de mes	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Capital	4000000	4100000	4202500,0					
Incremento del capital debido al interés	10000	102500	105062,5					
Capital final	4100000	4202500	4307562,5					

De la observación de los datos anteriores se puede determinar la siguiente fórmula que permite determinar el capital final C_f conocido el capital inicial C_i y el interés fijado i de acuerdo con la unidad de tiempo t elegida:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{i}{100} \right)^t$$

Se puede comprobar los resultados mostrados en la tabla anterior con esta fórmula, por ejemplo para $t = 3$, se tiene $C_f = 4000000 \left(1 + \frac{2.5}{100} \right)^3 = 4307562,5$



Ejemplo C

Sofía soñaba que había un banco que ofrecía el 100% de interés anual sobre los depósitos. En su sueño, ella depositaba un capital de 1 millón de pesos y al cabo de un año retiraba los 2 millones correspondientes.

Continuando con su sueño, ella lograba llegar a un acuerdo con el agente del banco para que el 100% anual se lo aplicaran mensualmente, distribuido en 12 partes iguales, y lo incorporaran cada vez al capital depositado. En esas condiciones del sueño, ¿cuánto dinero tiene en depósito al cabo de un año?

Continuando en la línea de ese sueño, si los intereses se los abonaran diariamente y pasaran a ser depositados automáticamente, ¿cuánto sería el dinero depositado al cabo de un año?

Si se disminuyera aún más la fracción del tiempo en que le abonan los intereses, ¿llegaría Sofía a triplicar su capital?

Solución: Por cierto que esta situación es ficticia.

Si el interés del 100% anual se aplicara mensualmente en 12 partes iguales, al cabo de un año el dinero que Sofía tendría en depósito sería:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{i}{100 * 12} \right)^t = 1.000.000 \left(1 + \frac{1}{12} \right)^{12} = 2.613.035,29 \text{ pesos}$$

Si el interés del 100% anual se aplicara diariamente en 365 partes iguales, al cabo de un año el dinero depositado de Sofía sería:

$$C_f = C_i \left(1 + \frac{i}{100 * 365} \right)^t = 1.000.000 \left(1 + \frac{1}{365} \right)^{365} = 2.714.567,49 \text{ pesos}$$

Intente con su calculadora cambiar los valores 12 y 365 por números mayores, observará que el valor de C_f nunca superará al número 2,8; más aún, no llegará a 2,7182.

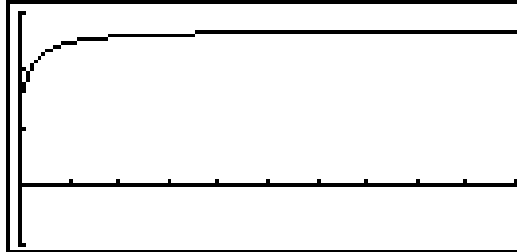
Evaluemos la expresión $y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ para $x = 100$, $x = 1.000$, $x = 10.000$ y observe la

tendencia de los resultados:

x	Y1
100	2.7048
1000	2.7169

x	Y1
10000	2.7169
100000	2.7181

Observemos la expresión $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ gráficamente como una función de x :



Con este ejemplo se ha introducido un número muy importante en matemática, el número que se designa como e

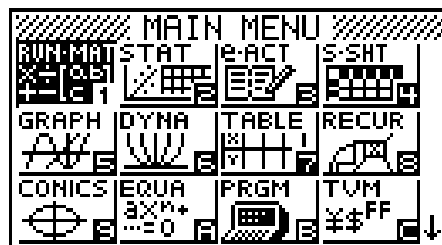
$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Ejemplo D

- I. Calcular $\log 100$; $\log 1$; $\log 10^{21}$; $\log 10$; $\log 100000$. En cada caso explicar la relación con la correspondiente potencia base 10.
- II. Graficar las funciones $y = \log x$; $y = 10^x$.
- III. Especular sobre el valor para $\log 50$ teniendo como referencia los valores de $\log 10$ y $\log 100$; constatar sus intuiciones con los resultados que proporciona una calculadora y con el gráfico.

Solución:

- I. Para calcular los logaritmos pedidos seleccionamos en el menú la ventana RUN- MAT



```

log 100          2
log 1            0
log 1021       21
[ ]             [21]
JUMP DEL  F-MAT MATH

```

```

log 1021       21
log 10          1
log 100000     5
[ ]             [5]
DEL DEL

```

Con los valores obtenidos es posible observar la relación entre ellos y la base 10 de los logaritmos

```

log 100          2
102           100
[ ]             [ ]
JUMP DEL  F-MAT MATH

```

```

log 1            0
100           1
[ ]             [ ]
JUMP DEL  F-MAT MATH

```

```

log 10          1
101           10
[ ]             [ ]
JUMP DEL  F-MAT MATH

```

```

log 100000     5
105           100000
[ ]             [ ]
JUMP DEL  F-MAT MATH

```

Es claro, de acuerdo a lo anterior que:

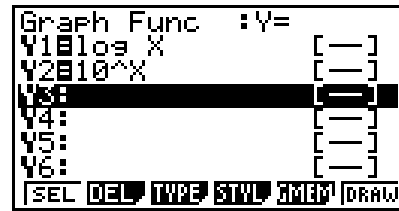
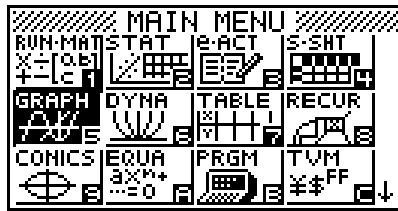
$$\begin{aligned}
 \log 100 = x &\Leftrightarrow 10^x = 100 = 10^2 &\Leftrightarrow x = 2 \\
 \log 1 = x &\Leftrightarrow 10^x = 1 = 10^0 &\Leftrightarrow x = 0 \\
 \log 10^{21} = x &\Leftrightarrow 10^x = 10^{21} &\Leftrightarrow x = 21 \\
 \log 10 = x &\Leftrightarrow 10^x = 10 = 10^1 &\Leftrightarrow x = 1 \\
 \log 100000 = x &\Leftrightarrow 10^x = 100000 = 10^5 &\Leftrightarrow x = 5
 \end{aligned}$$

Podemos concluir que el logaritmo en base 10 de un número positivo N es igual al exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

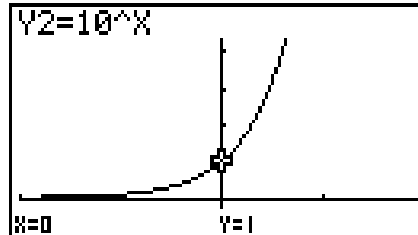
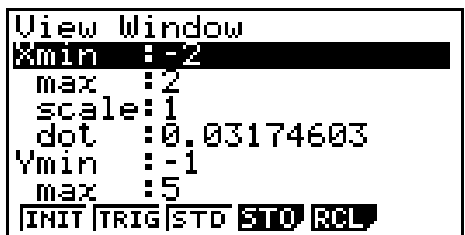
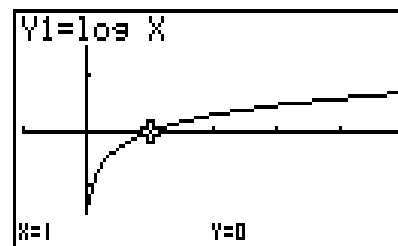
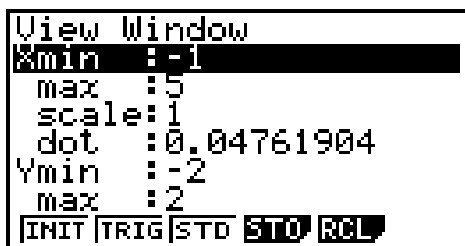
Así tenemos que:

$$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$$

II. En el menú de la calculadora escogemos la ventana GRAPH para graficar las funciones $y = \log x$; $y = 10^x$



Para una mejor observación del gráfico adecuamos la ventana de visualización de la siguiente forma:

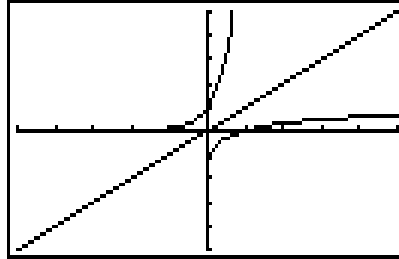


Al observar ambos gráficos podemos concluir que:

- El dominio de la función $y = \log x$ es igual al recorrido de la función $y = 10^x$
- El recorrido de la función $y = \log x$ es igual al dominio de la función $y = 10^x$
- Así, si $f(x) = \log x$ y $g(x) = 10^x$, entonces

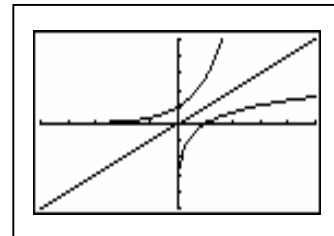
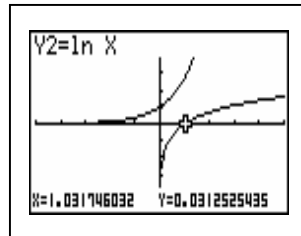
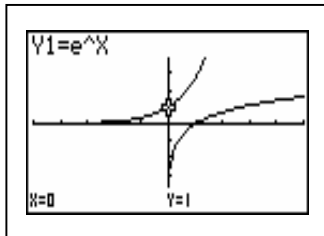
$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \mathbb{R}^+ = \text{Rec}(g) \\ \text{Rec}(f) &= \mathbb{R} = \text{Dom}(g) \end{aligned}$$

Al graficar ambas funciones en una misma ventana, es posible visualizar que la recta $y = x$ es un eje de simetría; luego podemos concluir que estas son funciones inversas una de otra.



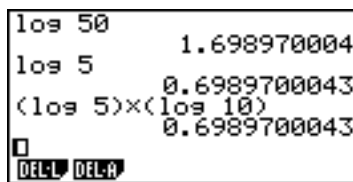
Es posible obtener características análogas si estudiamos las funciones

$$f(x) = e^x \quad \text{y} \quad g(x) = \ln x$$

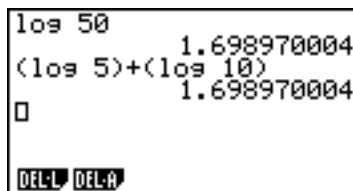


III. Los alumnos pueden preguntarse si dado que $50 = 5 \times 10$ y $50 = \frac{100}{2}$, entonces ¿cómo se relaciona el valor de $\log 50$ con $\log 10$ y con $\log 100$?

Al revisar en la calculadora podrá observar que:



$$\log 50 = \log (5 \times 10) \neq (\log 5) \times (\log 10)$$



$$\log 50 = \log (5 \times 10) = (\log 5) + (\log 10)$$

En general,

$$\log(N \times M) = \log N + \log M$$

En forma análoga:

```

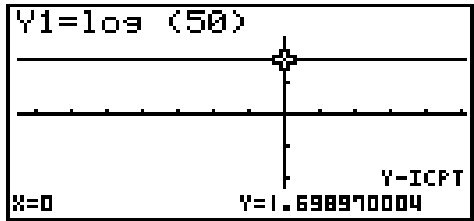
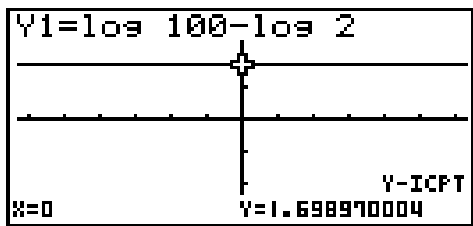
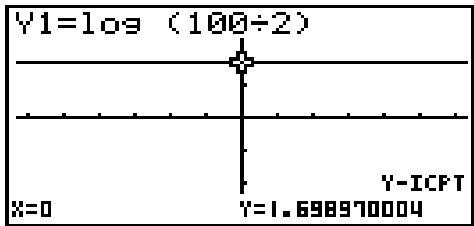
log 50      1.698970004
log 100
log 2      0.3010299957
DEL DEL
  
```

```

log 100÷log 2  6.64385619
log 100-log 2  1.698970004
log 50      1.698970004
JUMP DEL PMAT MATH
  
```

$$\log \frac{N}{M} = \log N - \log M$$

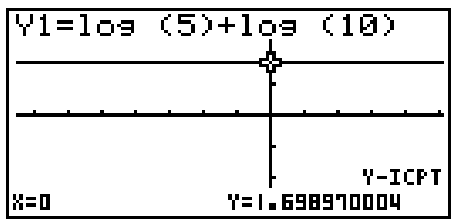
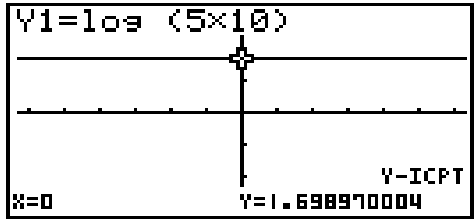
En las siguientes gráficas se observa que



```

log (50)      1.698970004
JUMP DEL PMAT MATH
  
```

De igual forma es posible ver que $\log 50 = \log(5 \times 10) = \log(5) + \log(10)$



Ejemplo E

I. Transformar a su forma exponencial las siguientes expresiones:

$$2 = \log_5 25, \quad a = \log_2 b, \quad a = \log_b c$$

II. Transformar a su forma logarítmica las siguientes expresiones:

$$9 = 3^2, \quad a = 7^4, \quad b = 5^a, \quad a = b^c$$

Solución:

Para resolver este ejercicio necesitamos recordar la conclusión que obtuvimos antes:

$$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$$

Esta equivalencia se puede generalizar a logaritmos en otras bases $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$:

$$\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N$$

Por lo tanto,

$$2 = \log_5 25 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

I $a = \log_2 b \Leftrightarrow 2^a = b$

$$a = \log_b c \Leftrightarrow b^a = c$$

$$9 = 3^2 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2$$

II $a = 7^4 \Leftrightarrow \log_7 a = 4$

$$b = 5^a \Leftrightarrow \log_5 b = a$$

$$a = b^c \Leftrightarrow \log_b a = c$$

Observe estas equivalencias y manipúlelas como un cambio de notación.

$$\log_{\sqrt{2}} (64) = 12 \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{2}^{12} \quad 64}$$

III. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos.


$$\text{Consideremos } \log a = x \Rightarrow 10^x = a$$

$$\log b = y \Rightarrow 10^y = b$$

$$\text{Luego, } \log (a \times b) = \log (10^x \times 10^y) = \log 10^{x+y} = x + y = \log a + \log b$$


Esta propiedad es también válida para logaritmos de base distinta de 10

$$\log (a \times b) = \log a + \log b$$

Usando la calculadora podemos comprobar con ejemplos esta propiedad 

```
log (45)
log (9x5)
log (9)+log (5)
```

1.653212514
1.653212514
1.653212514

 **JUMP DEL PRG MATH**

IV. El logaritmo de un cuociente es igual a la diferencia de los logaritmos

$$\text{Si ahora consideramos } \log a = x \Rightarrow 10^x = a$$

$$\log b = y \Rightarrow 10^y = b$$

$$\text{Luego, } \log \left(\frac{a}{b} \right) = \log \left(\frac{10^x}{10^y} \right) = \log 10^{x-y} = x - y = \log a - \log b$$


Esta propiedad es también válida para logaritmos de base distinto de 10

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Con la calculadora se puede comprobar la propiedad anterior.

```
log (80)
log (160÷2)
log (160)-log (2)
```

1.903089987
1.903089987
1.903089987

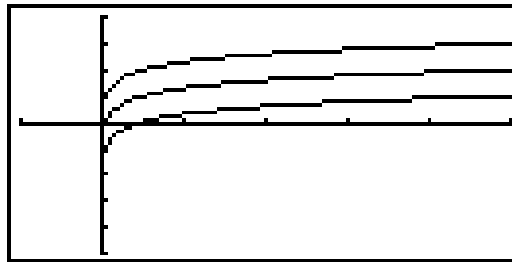
 **JUMP DEL PRG MATH**

V. El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente de ésta por el logaritmo de la base.

Si consideramos $\log a = x$, entonces $10^x = a$ y se tiene que

$$\log (a^b) = \log \left((10^x)^b \right) = \log (10^x)^b = \log (10)^{xb} = x \times b = b \times \log a$$

El gráfico, en una misma ventana de visualización de las funciones $\log (x)$, $\log (10x)$ y $\log (100x)$ permite comprobar algunas de las propiedades de la función logaritmo.



El gráfico muestra que la función $y = \log(10x)$ corresponde a la traslación vertical en una unidad hacia arriba de la función $y = \log(x)$, lo cual comprueba que:

$$\log(10x) = 1 + \log(x) = \log(10) + \log(x)$$

De igual forma $\log(100x) = 1 + \log(10x) = \log(10) + \log(10x)$

Por otra parte, al observar los gráficos anteriores pareciera que las funciones intersectan al eje de las Y, lo cual no es correcto y esto se puede comprobar evaluando estas funciones para diversos valores de x cercanos a cero.

$\log 0.002$	-2.698970004
$\log 0.00005$	-4.301029996

Ejemplo G

Resolver ecuaciones exponenciales sencillas como

I. $2^x = 1, \quad 2^x = 8$

II. $2^{x+1} = 4^{x+2}, \quad 3^x = 81^{x+1}$

III. $2^x = 5, \quad 8 \cdot 3^x = 5$

IV. $5^{x-2} = 3^{3x+2}$

Solución:

En la resolución de estas ecuaciones se muestran varios procedimientos; es conveniente que el alumno analice las ventajas de cada uno.

$$\text{I. } 2^x = 1 \Leftrightarrow 2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2 8 \Leftrightarrow x = 3$$

$$\text{II. } 2^{x+1} = 4^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{2(x+2)} \Leftrightarrow x+1 = 2x+4 \Leftrightarrow x = -3$$

$$3^x = 81^{x+1} \Leftrightarrow 3^x = 3^{4(x+1)} \Leftrightarrow x = 4x+4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Comprobamos con la calculadora:

$3^{(-4 \div 3)}$	0.2311204248
$81^{(-1 \div 3)}$	0.2311204248

Resolvemos $3^x = 81^{x+1}$ con la calculadora (EQUA del Menú):

Eq: $3^X = 81^{(X+1)}$
X = -1.333333333
Lft = 0.2311204248
Rgt = 0.2311204248

$$\text{III. } 2^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \approx 2,321928$$

$$8 \cdot 3^x = 5 \Leftrightarrow 3^x = \frac{5}{8} \Leftrightarrow x = \log_3 \frac{5}{8} = \frac{\log \frac{5}{8}}{\log 3} \approx -0,427815$$

Comprobamos con la calculadora:

$2^{2.321928}$	4.999999671
$2^{((\log 5) \div (\log 2))}$	5
$2^{((\ln 5) \div (\ln 2))}$	5

$8 \times 3^{(-0.427815)}$	5.000004065
$8 \times 3^{((\log (5 \div 8)) \div (\log 3))}$	5

IV. $5^{x-2} = 3^{3x+2}$. Usando la propiedad $\log(a^b) = b \log a$, la ecuación se escribe:

$$(x-2)\log 5 = (3x+2)\log 3$$

De aquí, $x(\log 5 - 3\log 3) = 2(\log 5 + \log 3)$,

$$x \log\left(\frac{5}{27}\right) = \log 225$$

$$x = \frac{\log 225}{\log \frac{5}{27}} \approx -3,211636$$

Comprobamos este resultado con la calculadora

```

3^(3*(-3.21163648)+2)
2.276262943E-04
3^(3*(-3.21163648)+2)
2.276262943E-04

```

Resolvemos con la calculadora:

```

Eq: 5^(X-2)=3^(3*X+2)
X=-3.211636482
Lft=2.27626293E-04
Rst=2.27626293E-04

```

Ejemplo H

Considerar las funciones $f(x) = 4x + 1$ y $g(x) = 3^x$

I. Graficar ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas.

II. Comparar

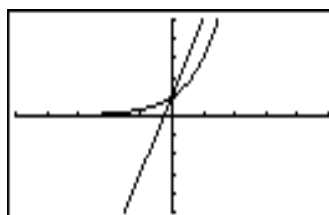
$$f(1) \text{ y } g(1), f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ y } g\left(\frac{5}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ y } g\left(\frac{5}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right) \text{ y } g\left(\frac{5}{2}\right)$$

III. ¿Para que valores de x es $f(x) \geq g(x)$?

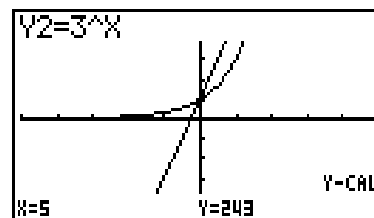
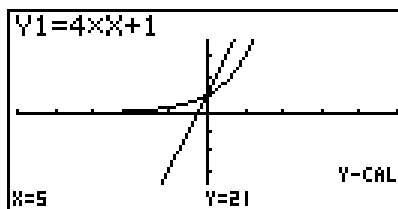
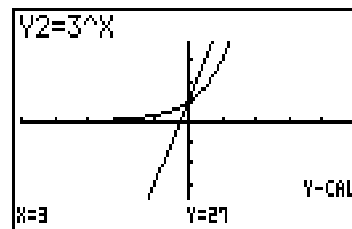
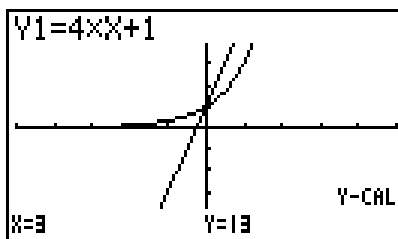
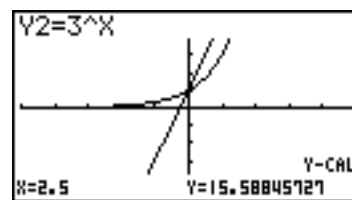
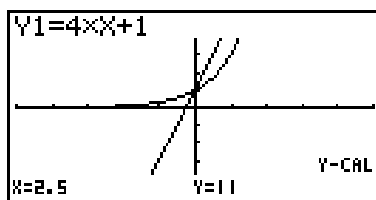
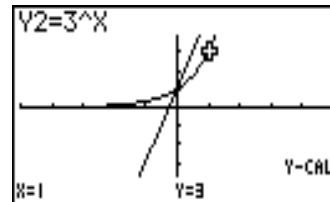
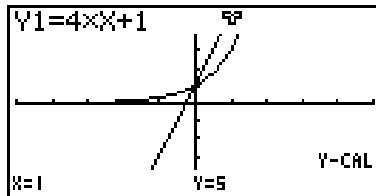
IV. ¿Para que valores de x es $f(x) \leq g(x)$?

Solución:

I. Gráfico de las funciones $f(x) = 4x + 1$ y $g(x) = 3^x$ en un mismo sistema de coordenadas



II. Podemos comparar los valores de ambas funciones para distintos valores de x utilizando el comando Y-CAL de la ventana gráfica



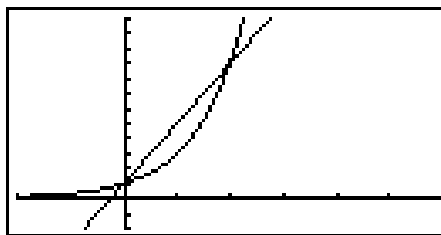
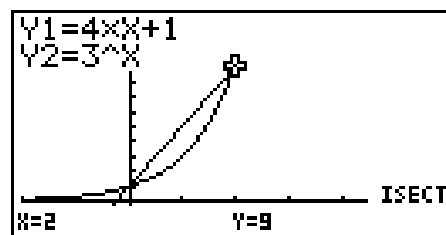
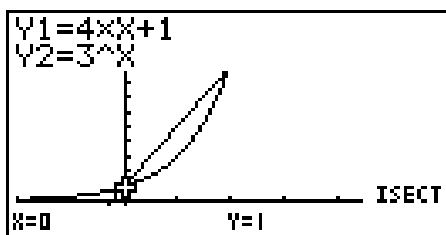
Los valores pedidos para las funciones $f(x) = 4x + 1$ y $g(x) = 3^x$ se muestran en la tabla siguiente:

x	1	$\frac{5}{2}$	3	5
$f(x) = 4x + 1$	5	11	13	21
$g(x) = 3^x$	3	15,58845727	27	243

Para hacer una mejor comparación de ambas funciones, se selecciona una adecuada ventana de visualización, por ejemplo:

```
View Window
Xmin :-2
max :6
scale:1
dot :0,06349206
Ymin :-2
max :12
INIT TRIG STD STO RCL
```

Luego determinamos los puntos de intersección: (0, 1) y (2, 9)



Mediante la observación de la gráfica es posible observar que el crecimiento de tipo exponencial es más rápido que el crecimiento lineal.

Además se puede verificar que:

III. La función $f(x) = 4x + 1$ es mayor o igual que la función $g(x) = 3^x$, $\forall x \in [0, 2]$

IV. La función $f(x) = 4x + 1$ es menor o igual que la función $g(x) = 3^x$, $\forall x \in [2, \infty[$ y $\forall x \in]-\infty, 0]$.

Actividad 3

Resuelven problemas acerca de fenómenos de distintos ámbitos que se modelan a través de la función exponencial y logarítmica.

Ejemplo A

En un equipo de amplificación se lee la siguiente información: “2.000 watts/m² de salida”. ¿A qué nivel de sonido, en decibeles, corresponde esta información?

Si otro equipo tuviera la lectura “4.000 watts/m² de salida”, ¿correspondería a un nivel de sonido igual al doble de decibeles que el anterior?

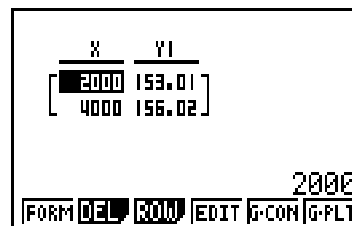
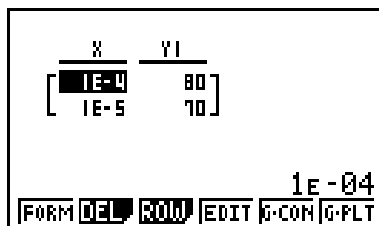
Considere que si *I* es la intensidad del sonido medido en watts/m², el nivel de decibeles (db) del sonido es:

$$D = 10 \log (I \cdot 10^{12}) \text{ db}$$

Solución:

En la tabla siguiente se entrega una relación entre intensidad de sonido y decibeles a modo de información:

Fuente	Intensidad	dB
Umbral auditivo	10 ⁻¹²	0
Susurro	10 ⁻¹⁰	20
Tráfico callejero intenso	10 ⁻⁵	70
Posible daño auditivo	10 ^{-3,5}	85
Cercano a un trueno	10 ⁰	120
Perforación instantánea del tímpano	10 ⁴	160



Considerando que *I* es la intensidad del sonido medido en watts/m², en el primer caso se tendría que:

$$D = 10 \log (2.000 \cdot 10^{12}) = 10 \log (2 \cdot 10^{15}) = 10 \log 2 + 150 = 153,0103 \text{ dB}$$

Por lo tanto, 2.000 watts/m² de intensidad de sonido corresponde a 153,0103 decibeles.

```
10*log (2000*10^12)
153.0103
```

En el segundo caso,

$$D = 10 \log(4.000 \cdot 10^{12}) = 10 \log(4 \cdot 10^{15}) = 10 \log 4 + 150 = 156,0205999 \text{ dB}$$

En consecuencia, 4.000 watts/m² de intensidad de sonido corresponde a 156,0205999 decibeles.

```
10*log (4000*10^12)
156.0205999
```

Ejemplo B

Un modelo matemático de crecimiento de la población mundial, para períodos cortos de tiempo, está dado por: $P = P_0 e^{rt}$, donde P_0 es la población cuando $t = 0$, r es la tasa de crecimiento en % anual, t es el tiempo en años, P es la población en el tiempo t .

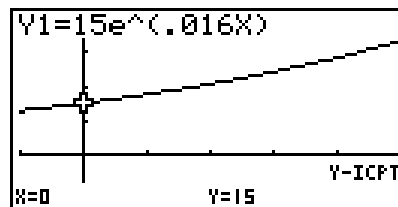
Si actualmente la población de Chile es de 15 millones de habitantes y la tasa de crecimiento, de acuerdo al período intercensal 1982 a 1992, es igual a 1,6% anual, ¿cuánto tiempo tardará en duplicarse la población, de acuerdo a ese modelo?

Solución:

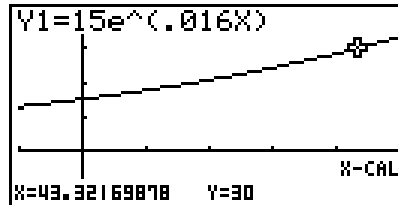
Si en el menú gráfico consideramos la ventana de visualización

```
View Window
Xmin : -10
max : 50
scale: 10
dot : 0.47619047
Ymin : -15
max : 40
INIT TRIG STD STO RCL
```

Entonces la gráfica de la función $y = 15e^{0.016x}$ es



Si la población se debe duplicar, entonces el número de habitantes debe ser de 30 millones. Para determinar en cuantos años esto se lograría se puede calcular x , para $y = 30$



Por tanto, si la tasa de crecimiento es de 1,6 % anual, la población tardará en duplicarse 43 años, aproximadamente.

Por otra parte, es posible comprobar este resultado si en la función $y = 15e^{0.016x}$, hacemos $y = 30$, y despejamos el valor de x :

$$30 = 15e^{0.016x}$$

$$2 = e^{0.016x}$$

$$\ln 2 = 0.016x$$

$$x = \frac{\ln 2}{0.016} = 43,32169878$$

Resolviendo la ecuación con la calculadora:

Ejemplo C

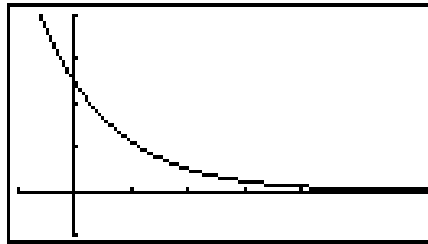
La cantidad de miligramos de un medicamento que queda en el organismo de una persona luego de h horas de haber sido administrado está dado por $10e^{-0,2h}$.

- I. Graficar la función y comentarla
- II. Si la cantidad de remedio no puede bajar de 2 mg., ¿cada cuánto tiempo, en horas, deberá tomar el medicamento?

Solución:

Denotemos por $M(h) = 10e^{-0,2h}$ mg., la cantidad de medicamento que queda en el organismo luego de h horas de haber sido administrado.

I. Graficamos la función M con la calculadora:



Observando el gráfico podemos comentar que:

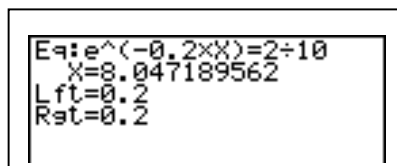
- La función M tiene dominio al conjunto \mathbb{R} de los números reales. Sin embargo, para el contexto de este problema, la función M tiene sentido para variables reales mayores o iguales a cero.
- En el momento que se ingiere el medicamento, es decir, cuando $h = 0$, en el organismo quedan 10 mg., de medicamento.
- La función alcanza sólo valores positivos, esto significa que el recorrido de M es \mathbb{R}^+ .
- La función M es decreciente; en términos del problema esto significa que a medida que pasan las horas, en el organismo queda menos medicamento llegando a eliminarse casi completamente.

II. El problema es determinar cuando el medicamento en el organismo decrece hasta llegar a 2 mg. Planteamos:

$$\begin{aligned}M(h) = 2 &\Leftrightarrow 10e^{-0,2h} = 2 \\e^{-0,2h} &= 0,2 \\-0,2h &= \ln 0,2 \\h &= -\frac{\ln 0,2}{0,2} = 5 \ln 5 \approx 8,0471895\end{aligned}$$

Por lo tanto, la persona debería tomar el medicamento cada 8 horas.

Esta ecuación se puede resolver con la calculadora:



Ejemplo D

Se sabe que mientras un animal o planta esté vivo mantiene en sus tejidos una concentración constante de carbono 14 (radiactivo). Al morir, los tejidos dejan de absorber carbono con lo cual comienza a disminuir su presencia por desintegración radiactiva según el modelo matemático:

$$C(t) = C_i e^{-(0.000124 t)}$$

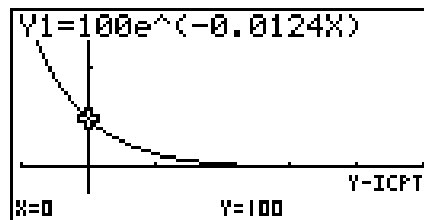
donde $C(t)$ es la cantidad restante de carbono después de t años, C_i es la cantidad inicial y t es el tiempo en años.

- I. Graficar la función determinando dominio y recorrido.
- II. Determinar en cuantos años la cantidad inicial de carbono 14 baja a la mitad.
- III. Calcular la antigüedad de un cráneo descubierto en un sitio arqueológico, si aún está presente el 10% de la cantidad original de carbono 14.

Solución:

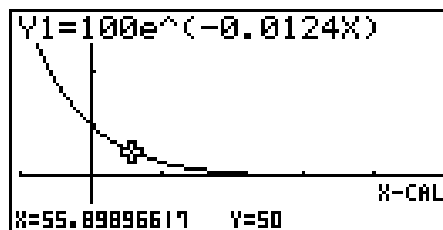
- I. Dado que la constante que multiplica a t es muy pequeña es conveniente expresar el tiempo t en siglos.

Para graficar la función consideraremos la cantidad inicial como $C_i = 100$, de esta forma la función es $y = 100e^{-0.0124 x}$.



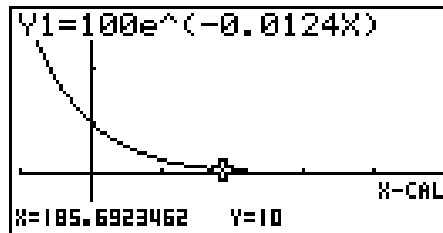
El dominio de la función, en el contexto del problema es el intervalo $[0, \infty[$ y el recorrido es el intervalo $]0, 100]$

- II. Para determinar en cuantos años la cantidad de carbono 14 baja a la mitad y considerando que se tomó como cantidad inicial $C_i = 100$, determinamos el valor de x para $y = 50$



Por tanto se requiere de aproximadamente 55,89 años para que la cantidad inicial de carbono 14 se reduzca a la mitad.

- III. Para determinar la antigüedad de un cráneo, que tiene aún presente un 10% de la cantidad original de carbono y considerando como cantidad inicial 100, debemos calcular en la función $y = 100e^{-0.0124x}$ el valor de x para $y = 10$.



Podemos concluir que la antigüedad del cráneo que tiene presente el 10% de la cantidad de carbono inicial es de aproximadamente 185,69 años.

Ejemplo E

Una escala utilizada para medir la magnitud de un sismo es la escala de Richter. La cantidad de energía liberada en un movimiento sísmico está dada por la fórmula:

$$\log E = 1,5 R + 11,8$$

donde E es la energía liberada medida en ergios y R es la magnitud del sismo en grados de la escala de Richter.

- I. Exprese la energía liberada en su forma exponencial.
- II. ¿Qué cantidad de energía se libera en un temblor de grado 4?, ¿y de grado 5?
- III. ¿Cuál es la relación numérica entre ambos valores?
- IV. El aumento de un grado en la escala Richter, ¿qué aumento representa, aproximadamente, en la cantidad de energía liberada? Y si el aumento fuera de dos grados, ¿qué incremento se produce en la energía liberada?
- V. Desde que se dispone de instrumentos de medición sísmica, el terremoto de mayor magnitud registrada es el de Valdivia en el año 1960, que tuvo una magnitud de 9,5 grados en la escala de Richter. Comparar la energía liberada en este terremoto con la de otros de magnitud conocida.

Solución:

I. $\log E = 1,5R + 11,8 \Leftrightarrow E = 10^{1,5R+11,8}$

II. Si $R = 4$, $E = 10^{1,5 \cdot 4 + 11,8} = 10^{17,8}$

Si $R = 5$, $E = 10^{1,5 \cdot 5 + 11,8} = 10^{19,3}$

$10^{17,8}$ $6.309573445E+17$
$10^{19,3}$ $1.995262315E+19$

III. Entre los valores obtenidos anteriormente existe la siguiente relación numérica:

$$s = \frac{10^{19,3}}{10^{17,8}} = 10^{1,5} \approx 31,6227766$$

$(10^{19,3}) \div (10^{17,8})$ 31.6227766
--

IV. Si el aumento en la escala Richter es de un grado, el logaritmo de E aumenta en 1,5; luego la energía liberada E aumenta en $10^{1,5}$ aproximadamente 31,6227766

Si el aumento en la escala Richter es de dos grados, el logaritmo de E aumenta en 3; luego la energía liberada E aumenta en $10^3 = 1.000$ ergios.

V. La magnitud del terremoto de Valdivia (1960) fue 9,5 grados Richter. El reciente terremoto de Haití (2010) tuvo una magnitud de 7,5 grados Richter.

La energía liberada en el terremoto de Valdivia fue $E_V = 10^{1,5 \cdot 9,5 + 11,8} = 10^{26,05}$

La energía liberada en el terremoto de Haití fue $E_H = 10^{1,5 \cdot 7,5 + 11,8} = 10^{23,05}$

Ejemplo F

Investigaciones médicas afirman que el riesgo R, expresado en porcentaje, que tiene una persona de sufrir un accidente mientras conduce un vehículo bajo los efectos del alcohol, está dado por la expresión:

$$R = 6e^{kx}$$

donde x es la concentración porcentual de alcohol en la sangre y k es una constante.

- I. Calcular la constante sabiendo que una concentración de un 4% de alcohol en la sangre significa un riesgo de 10% de tener un accidente.
- II. Graficar la función y comentarla.
- III. Comentar sobre el máximo riesgo posible.
- IV. Calcular la máxima concentración posible para no sobrepasar el 20% de riesgo.

Solución:

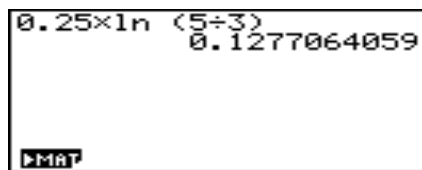
- I. Sea $y = 6e^{kx}$ la función que representa el porcentaje de riesgo de accidente, donde x es la concentración porcentual de alcohol en la sangre y k es una constante.

Para determinar el valor de la constante k , considerando que una concentración de 4% de alcohol en la sangre significa un 10% de tener un accidente, deberemos despejar k de la ecuación $10 = 6e^{4k}$

$$\frac{5}{3} = e^{4k}$$

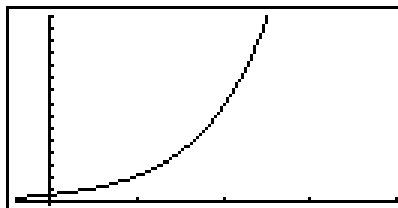
$$\ln\left(\frac{5}{3}\right) = 4k$$

$$k = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$



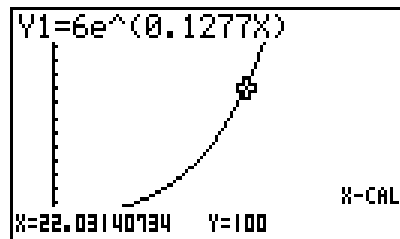
El valor de la constante k es 0,1277.

- II. Graficamos la función $y = 6e^{(0,1277x)}$



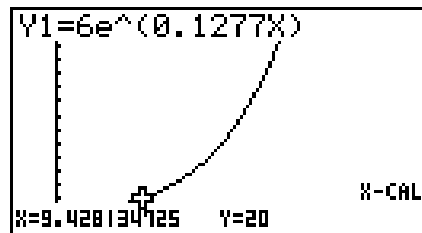
La función nos muestra que el riesgo de sufrir un accidente al conducir un vehículo bajo los efectos del alcohol crece en forma exponencial, a mayor cantidad de alcohol, mayor es la probabilidad de tener un accidente.

- III. El tener un máximo de riesgo equivale a un 100%, obtenemos por tanto el valor de x para $y = 100$.



Podemos llegar a concluir que con una concentración de a lo menos 22,03 % de alcohol en la sangre, el riesgo de accidente es de un 100%.

- IV. Para determinar la máxima concentración posible y no sobrepasar el 20% de riesgo, recurrimos a la calculadora obteniendo el valor de x para $y = 20$.



Los datos entregados en la gráfica nos indican que para no sobrepasar el 20% de riesgo, la concentración máxima de alcohol en la sangre no debe ser mayor de 9,4281%.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Actividad 1

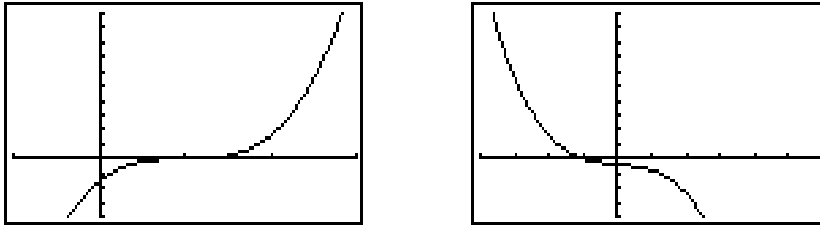
Relacionan la expresión algebraica y el gráfico de la función potencia; la utilizan para el estudio de algunos fenómenos.

Ejemplo A

Dado ciertos gráficos se pide identificar el tipo de expresión algebraica que representa a cada uno de los gráficos.

Solución:

En este caso se trata de dos gráficos que representan funciones polinomiales tales como,



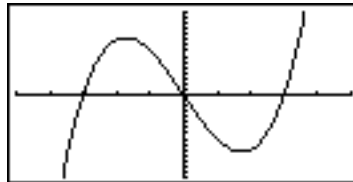
Ejemplo B

Determinar los puntos de intersección con el eje X de la función $y = x(x^2 - 9)$

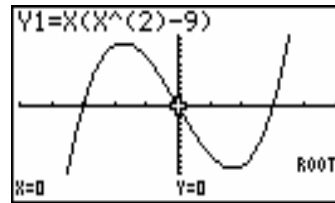
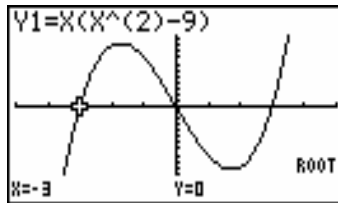
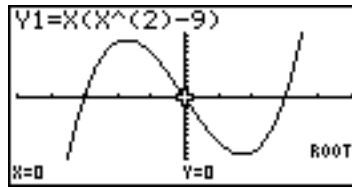
Observar si grafican la función y encuentran la respuesta a través del gráfico o bien, si la resuelven algebraicamente, igualando $y = 0$

Solución:

Al graficar en la calculadora la función $y = x(x^2 - 9)$ se obtiene:



y utilizando G-Solv se determinan las raíces o ceros de la función que representan las intersecciones con el eje X.



Luego, la gráfica de la función interseca al eje X en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 3$.

Ahora, si procedemos algebraicamente al cálculo de x , para $y = 0$ se tiene que:

$$x(x^2 - 9) = 0$$

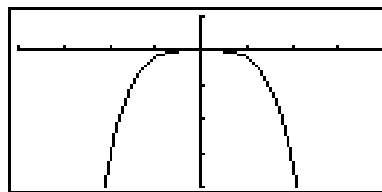
$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

Luego, $x = 0 \vee x - 3 = 0 \vee x + 3 = 0$, de donde se tiene que las intersecciones con el eje X son:

$$x = 0, \quad x = -3 \quad \text{y} \quad x = 3$$

Ejemplo C

Caracterizar el parámetro a y el exponente n en la función $y = ax^n$, si el gráfico es del tipo siguiente:



Solución:

Al observar el gráfico se debería reconocer la simetría de la curva respecto del eje Y, es decir, se trata del gráfico de una función par. En consecuencia, el exponente n debe ser par, puesto que de esta manera se cumple que

$$y(-x) = a(-x)^n = ax^n = y(x)$$

Aún cuando el gráfico no tiene numeración en los ejes, para así encontrar el valor de n con mayor precisión, podríamos asignar al exponente el valor $n = 4$.

Al ser n par, y por tratarse de una curva que alcanza valores negativos (abre hacia abajo), el parámetro a debe ser un número negativo; asignemos $a = -1$.

En consecuencia, el gráfico corresponde a $y = -x^4$.

Actividad 2

Utilizan la función exponencial, en particular la de base e para el estudio de algunos fenómenos.

Ejemplo A

Comparar el costo de un préstamo al 12% anual con otro al 1% mensual.

Solución:

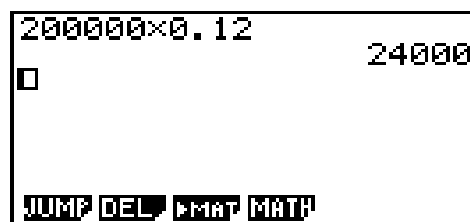
Supongamos que se pide un préstamo 200.000 pesos a un 12% de interés anual. Determinemos el interés simple y el monto a pagar:

El préstamo pedido es $C = 200.0000$ pesos

El tiempo es $t = 1$ (año)

La tasa de interés es $i = 0,12$ (anual)

Luego, dado que el interés es $I = C \times t \times i$, entonces:



El interés simple del préstamo es de 24.000 pesos y el monto a pagar es:

$$200.000 + 24.000 = 224.000 \text{ pesos.}$$

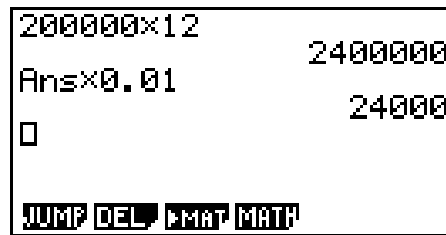
Al solicitar el mismo préstamo de 200.000 pesos a un interés de un 1% mensual, debemos considerar:

Cantidad pedida $C = 200.000$ pesos

El tiempo es $t = 12$ (meses)

La tasa de interés es $i = 0,01$ (mensual)

Luego, dado que el interés es $I = C \times t \times i$, entonces:



Se observa que en este caso el interés simple es el mismo, 24.000 pesos, y por tanto el monto a pagar tampoco varía.

Es importante destacar que para el último cálculo del interés se expresa el tiempo en meses.

Ejemplo B

La ecuación del decaimiento del gas radón es $y(t) = y(0) \cdot e^{-0,8t}$, en que t está medido en días. ¿Cuánto tiempo demoraré para decaer el 90% de la cantidad inicial?

Solución

Llamemos de k a la cantidad inicial $y(0)$; entonces la función del decaimiento es:

$$y(t) = k \cdot e^{-0,8t}$$

Se quiere determinar t de modo que $y(t) = 0,1 k$, es decir,

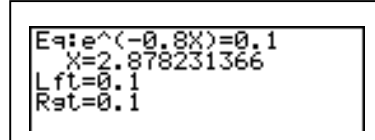
$$k \cdot e^{-0,8t} = 0,1k$$

$$-0,8t = \ln(0,1)$$

$$t = -\frac{5}{4} \ln(0,1) \approx 2,878231366$$

Por lo tanto, para que se produzca un decaimiento del 90% de la cantidad inicial del gas deben pasar casi tres días; más precisamente, 2,88 días.

La ecuación se puede resolver con la calculadora:

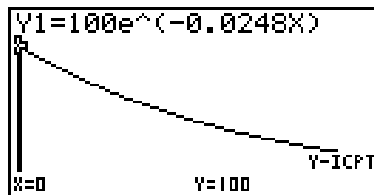


Ejemplo C

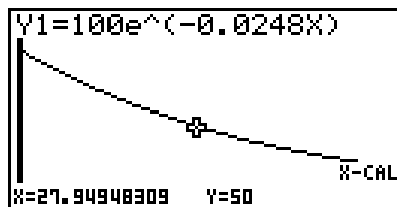
El estroncio 90 se utiliza en los reactores nucleares y se desintegra según la fórmula $A = P e^{(-0,0248 t)}$, donde P es la cantidad presente cuando $t = 0$, A es la cantidad restante después de t años. Encontrar t tal que A sea la mitad de P .

Solución:

Supongamos que $P = 100$



Para calcular t de manera que A sea 50 utilizamos G-Solv de la calculadora:



Luego para que el valor de A sea la mitad de P el tiempo debe ser de aproximadamente 27,94 años. Si despejamos t para $A = 50$, se tiene:

$$50 = 100 e^{-0,0248 t}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-0,0248 t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,0248 t$$

$$t = \frac{-1}{0,0248} \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$t = 27.949$$

En la calculadora:

```
In (1÷2) -0.6931471806  
Ans×-1÷0.0248  
27.94948309  
□  
JUMP DEL MATH MATH
```