ARTICULO.

Algunos ejercicios con serie de Fourier.

Tarea 1

a. Construya funciones de usuario para calcular los coeficientes de la serie de Fourier en el espacio de funciones continuas por ramas definidas el intervalo $[-L, L]$.

b. Construya una función de usuario que calcule la suma parcial S_N de la serie de Fourier para un número arbitrario N de términos.

c. Empleando las funciones construidas calcule $S_5(x)$, $S_{10}(x)$ y $S_{50}(x)$ para la función $f(x)=x$ en el intervalo $x \in [-\pi, \pi]$ y grafíquelas. Discuta el resultado obtenido.

Solución

a. Las funciones de usuario para calcular los coeficientes de la serie de Fourier se dan en los siguientes recuadros:

$$\boxed{\text{Define library\textbackslash A0(a,b,L)=(1/L)}\times \int \text{(a,b,-L,L)}}$$

$$\boxed{\text{Define library\textbackslash An(a,b,L,n)=(1/L)}\times \int (\text{a}\times\cos(\frac{\text{n}\pi}{\text{L}}\times\text{b}),\text{b,-L,L})}$$

$$\boxed{\text{Define library\textbackslash Bn(a,b,L,n)=(1/L)}\times \int (\text{a}\times\sin(\frac{\text{n}\pi}{\text{L}}\times\text{b}),\text{b,-L,L})}$$

El parámetro “a” es la función, “b” es la variable, “L” es el semiperíodo, “n” indica el n-esimo coeficiente.

b. Para calcular la suma parcial definimos la función “FourierN” de la manera siguiente:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Define library\textbackslash FourierN(a,b,L,N)=}\\ =\dfrac{\text{A0}(\text{a,b,L})}{2}+\sum(\text{An}(\text{a,b,L,n})\times\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}\times b\right)+Bn(\text{a,b,L,n})\times\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}\times b\right),\text{n},1,N)\end{array}}$$

c. Dada la función $f(x)=x$ en el intervalo $x \in [-\pi, \pi]$ calculamos los coeficientes de su serie de Fourier con ayuda de las funciones de usuario arriba definidas. El cálculo de estos coeficientes se muestra en la figura 1. Observe, que como era de esperar, los coeficientes “A0” y “An” se anulan porque la función $f(x)=x$ es impar. Por otro lado vemos que el coeficiente “Bn” es distinto de cero, pero el resultado que nos ofrece la calculadora no está totalmente simplificado. El problema radica en que la variable “n” no es asumida como un número entero. En este caso debemos recordar que “$\sin(n\pi)=0$” y “$\cos(n\pi)=(-1)^n$” (ver figura 1). Con la función de usuario “FourierN” podemos calcular la suma parcial para cualquier número de términos “N”. En las figuras 2, 3, 4 se muestran los cálculos de las sumas parciales $S_5(x)$, $S_{10}(x)$ y $S_{50}(x)$ con sus correspondientes gráficos. Los gráficos fueron construidos arrastrando la expresión obtenida hasta la ventana de geometría, abierta desde el menú “main”.

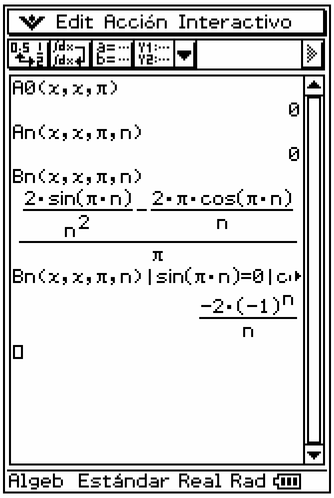

Figura 1

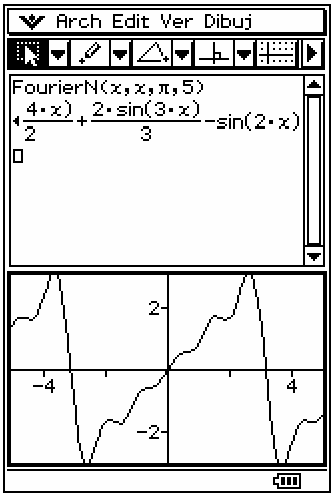

Figura 2

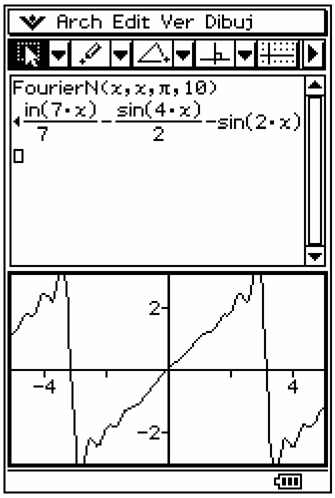

Figura 3

Varias observaciones pueden hacerse respecto a estos gráficos. Primero, a medida que se toman más términos en la suma parcial se observa una mejor convergencia a la gráfica de la función $f(x)$. En la figura 4 se grafican simultáneamente la función $f(x)=x$ y la suma parcial $S_{50}(x)$, puede verse claramente que ambas coinciden en mayor medida que en el caso de las sumas $S_5(x)$ y $S_{10}(x)$ dadas en las figuras 2 y 3. Segundo, la suma parcial es una función periódica que en el intervalo $x\in[-L,L]$ converge a $f(x)$. Tercero, en los extremos del intervalo $[-L,L]$ se observan desviaciones importantes en la convergencia. Este hecho se denomina fenómeno de Gibbs.

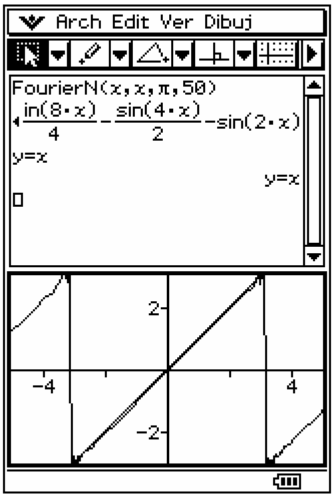

Figura 4

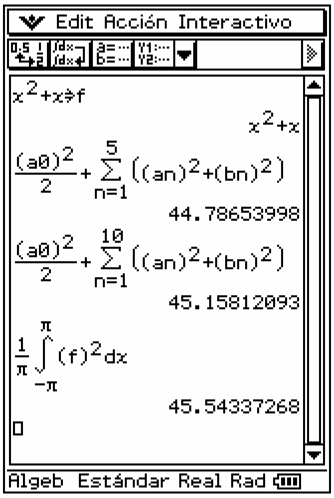

Figura 5

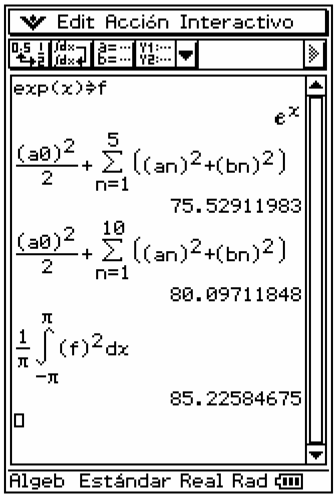

Figura 6

Tarea 2:
Halle evidencias numéricas que muestren que la desigualdad (desigualdad de Bessel) es correcta:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx,\quad N=1,2,\dots$$

Donde $f(x)$ es una función suave por ramas y periódica con periodo 2π, a_0, a_n, b_n son los coeficientes de su serie de Fourier.

Solución:

Para verificar numéricamente la desigualdad tomamos un par de ejemplos con funciones diferentes y valores diferentes de N.
Por comodidad en la notación escribimos en la calculadora:

$\boxed{A0(f,x,\pi) \Rightarrow a0}$ $\boxed{An(f,x,\pi,n) \Rightarrow an}$ $\boxed{Bn(f,x,\pi,n) \Rightarrow bn}$

En la figura 5 y 6 se muestran los cálculos para las funciones $f(x)=x^2+x$, y $f(x)=e^x$ con dos valores de N respectivamente. En ambos ejemplos observamos que se cumple la desigualdad.

Tarea 3:

Determine la serie de Fourier para la función:

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\end{cases}$$

a. Grafique la función $f(x)$ junto a las sumas parciales S_5, S_{10} y S_{50}

Solución.

A pesar de que la calculadora posee la función "piecewise" para definir funciones por ramas, esta es una herramienta que no posee utilidad práctica alguna. Por esta razón los cálculos deben hacerse sin emplear las funciones de usuario arriba definidas. En este ejercicio en particular, vemos que la función $f(x)$ es impar por tanto los coeficientes a_0 y a_n se anulan para cualquier valor de n. La figura 7 muestra los cálculos de los coeficientes b_n. También se define la suma parcial como una función de dos variables "$S(x,N)$" y se muestra el resultado para "N=3".

En las figuras 8-10, se muestran la función $f(x)$ y las sumas parciales S_5, S_{10} y S_{50}. Se observa claramente una convergencia de la serie a la función, a medida que se incluyen más términos en la serie.

b. La serie de Fourier para la función $f(x)$ tiene la forma $f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$, donde hemos usado el hecho que $\cos(n\pi)=(-1)^n$. Para $x\in(0,\pi)$ la función $f(x)=1$ y por tanto la serie converge puntualmente a 1. Es decir, $1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$, para $x\in(0,\pi)$. O pasando π para el lado izquierdo tenemos $\pi=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right)\sin(nx)$. La figura 11 muestra los cálculos hechos cuando $x=\frac{\pi}{4}$. Se observa, como era de esperar, una mejor aproximación al valor de π a medida que se incluyan más términos en la serie.

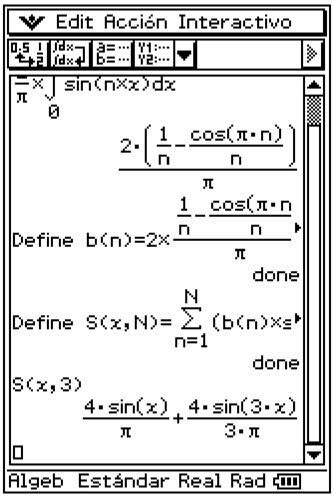

Figura 7

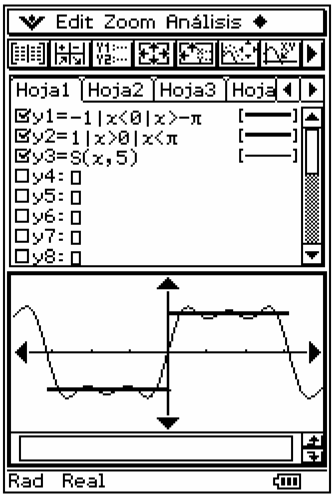

Figura 8

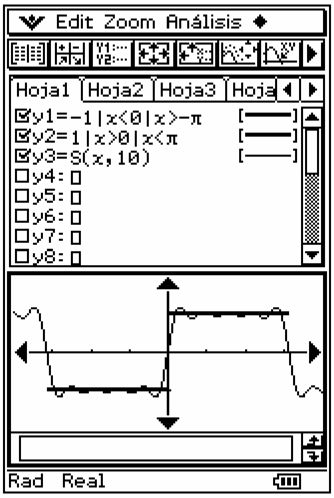

Figura 9

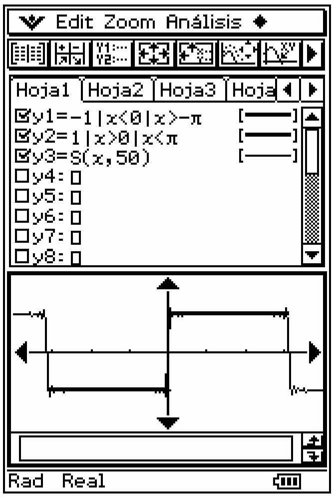

Figura 10

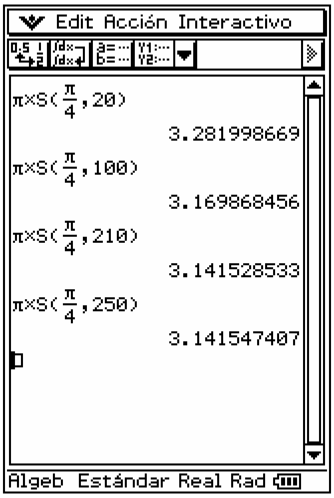

Figura 11

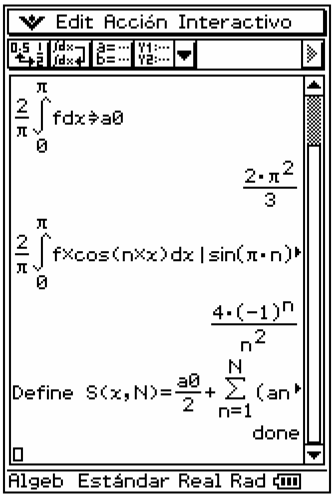

Figura 12

Tarea 4:

Halle la serie de cosenos y la serie de senos de la función $f(x)$ si $x \in [0, \pi]$.

Solución

En la figura 12 se muestran los cálculos para las serie de cosenos de la función $f(x)$. La figura 13 muestra las gráficas de la suma parcial S_5 y de la función $F_{\text{Par}}(x)$

La figura 14 muestra los cálculos para la serie de senos de la función $f(x)$. La figura 15 muestra la gráfica de la suma parcial $f(x)$ y la función $F_{\text{Impar}}(x)$.

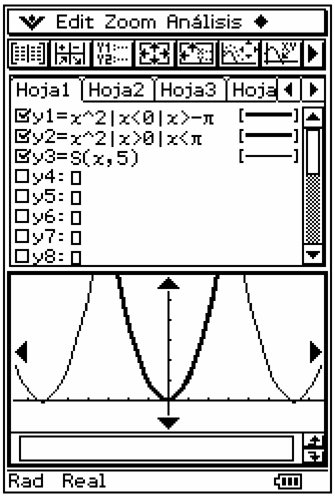

Figura 13

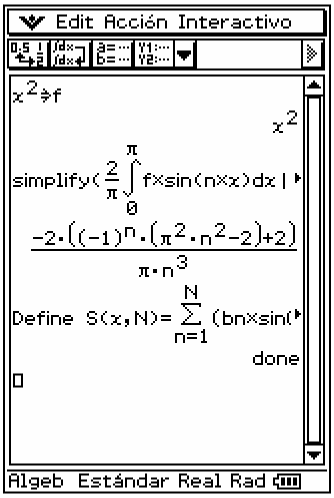

Figura 14

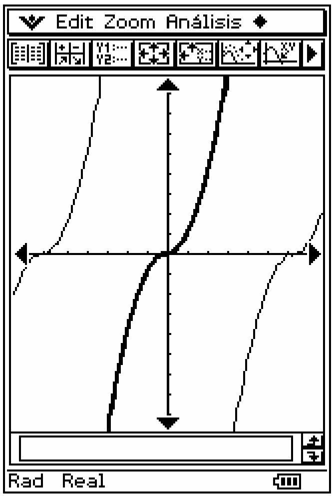

Figura 15