Universidad Diego Portales
Facultad de Ingeniería
Instituto de Ciencias Básicas

Primer Semestre 2007

Asignatura: Ecuaciones Diferenciales

Laboratorio Nº 1
La Descripción Gráfica de la Ecuación Diferencial Ordinaria

Objetivo general

Describir en forma gráfica a la ecuación diferencial ordinaria de primer orden, ya sea a partir de su campo de pendientes como también de la curva solución que pase por un determinado punto. Comprobar, usando calculadora, los métodos de separación de variables y ecuaciones diferenciales homogéneas.

Objetivos específicos

1 Obtener los puntos de la curva solución, de una ecuación diferencial de primer orden, de manera aproximada.
2 Dibujar los campos de pendientes de una ecuación diferencial de primer orden, de manera aproximada.
3 Resolver ecuaciones diferenciales de variables separables.
4 Analizar y resolver ecuaciones diferenciales homogéneas.

Actividades

Nº de actividad	Contenido
1	**Curva solución de una ecuación diferencial de primer orden**
2	**Campo de pendientes de una ecuación diferencial de primer orden**
3	**Ecuación diferencial de primer orden de variables separables**
4	**Ecuación diferencial Homogénea**
5	**El alumno desarrollará 2 actividades propuestas**

Metodología

En las dos primeras actividades desarrollaremos un método gráfico basado en el método de Euler que permite calcular aproximadamente los valores de la curva solución de una ecuación diferencial y sus correspondientes campos de pendientes. En las actividades 3 y 4 desarrollamos los métodos tradicionales y cuando sea posible nos apoyaremos en el uso de calculadoras. El método de Euler y los programas, construidos a partir de él, se muestran a continuación.

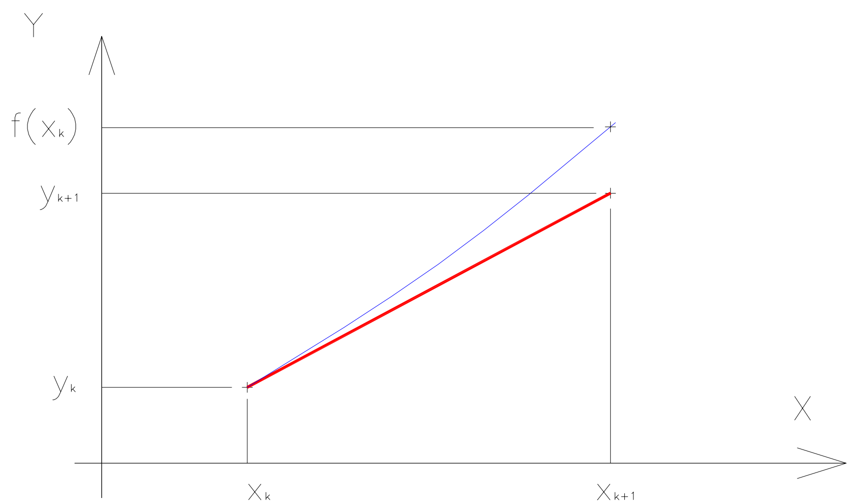
Usaremos el método de Euler para determinar, en forma aproximada, la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$, que pase por el punto (x_0, y_0).

Método de Euler:

Dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$ y el tamaño del paso h, calcule el punto (x_{k+1}, y_{k+1}) a partir del punto precedente (x_k, y_k) como sigue:

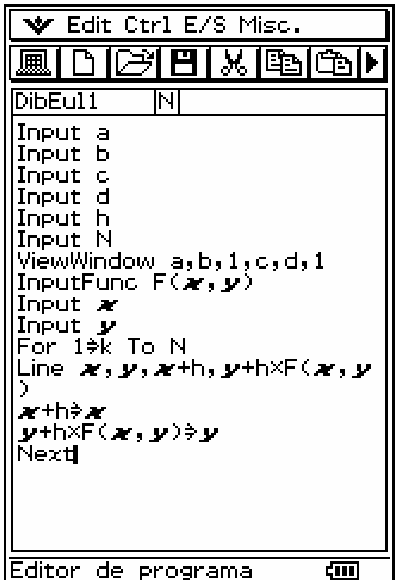
1. Use la ecuación diferencial para determinar la pendiente $F(x, y)$.
2. Calcule el siguiente punto (x_{k+1}, y_{k+1}) mediante las fórmulas

$$x_{k+1} = x_k + h \quad \text{y} \qquad y_{k+1} = y_k + hF(x_k, y_k).$$



Programas para calcular y graficar la curva solución

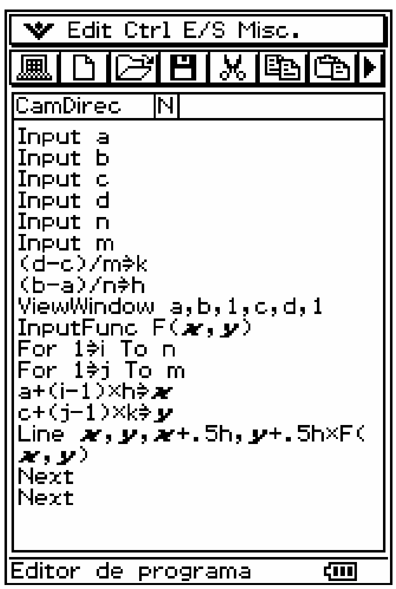
Usando el siguiente programa, podemos obtener los puntos de la curva solución, de manera aproximada.



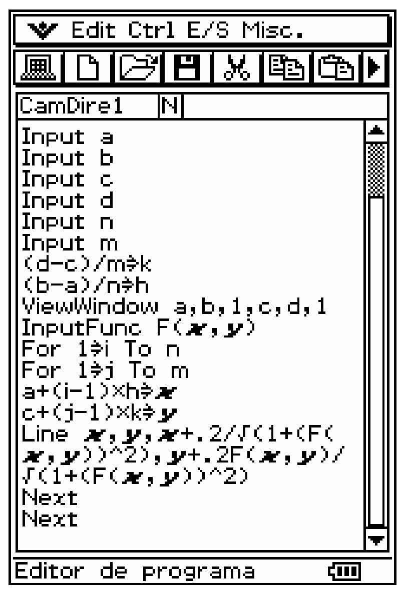
```
Edit Ctrl E/S Misc.
DibEul1
Input a
Input b
Input c
Input d
Input h
Input N
ViewWindow a,b,1,c,d,1
InputFunc F(x,y)
Input x
Input y
For 1⇒k To N
Line x,y,x+h,y+h×F(x,y
)
x+h⇒x
y+h×F(x,y)⇒y
Next
Editor de programa
```

Usando el siguiente programa podemos visualizar la curva solución, de manera aproximada.

Usando el siguiente programa (o el alternativo) podemos visualizar el campo de direcciones de una ecuación diferencial, de manera aproximada.



```
Edit Ctrl E/S Misc.
CamDirec
Input a
Input b
Input c
Input d
Input n
Input m
(d-c)/m⇒k
(b-a)/n⇒h
ViewWindow a,b,1,c,d,1
InputFunc F(x,y)
For 1⇒i To n
For 1⇒j To m
a+(i-1)×h⇒x
c+(j-1)×k⇒y
Line x,y,x+.5h,y+.5h×F(
x,y)
Next
Next
Editor de programa
```

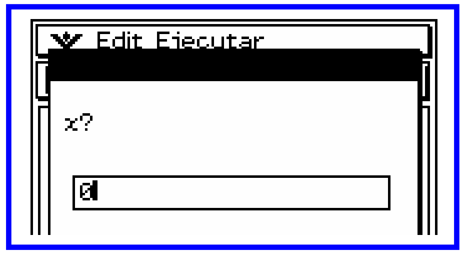


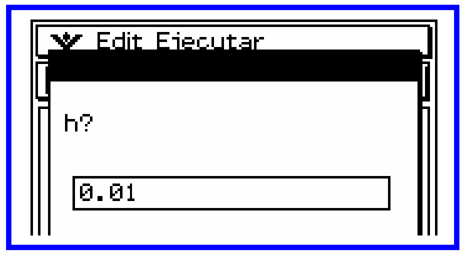
```
Edit Ctrl E/S Misc.
CamDire1
Input a
Input b
Input c
Input d
Input n
Input m
(d-c)/m⇒k
(b-a)/n⇒h
ViewWindow a,b,1,c,d,1
InputFunc F(x,y)
For 1⇒i To n
For 1⇒j To m
a+(i-1)×h⇒x
c+(j-1)×k⇒y
Line x,y,x+.2/√(1+(F(
x,y))^2),y+.2F(x,y)/
√(1+(F(x,y))^2)
Next
Next
Editor de programa
```

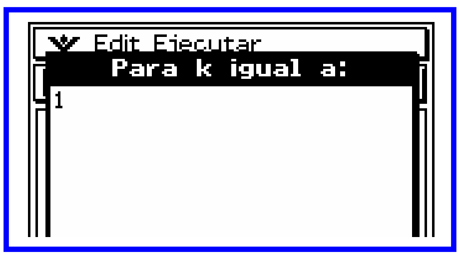
Explique cada línea de los programas dados e indique que diferencias substanciales existen entre ellos.

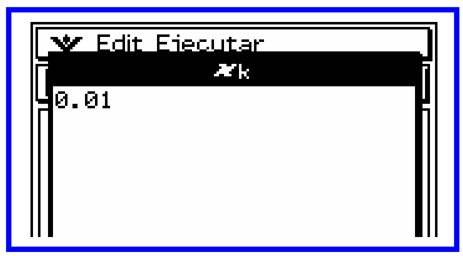
Actividad 1: Use el método de Euler, con el tamaño del paso $h = 0.01$ para aproximar la solución al problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = 2y - 1, y(0) = 1, \; 0 \le x \le 1$ Su respuesta debe incluir una tabla de valores aproximados de la variable dependiente. Incluya, también, un croquis de la gráfica de la solución aproximada.

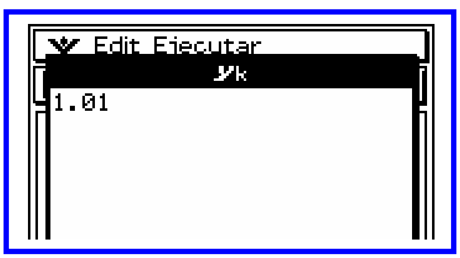
Solución: Construcción de la Tabla.





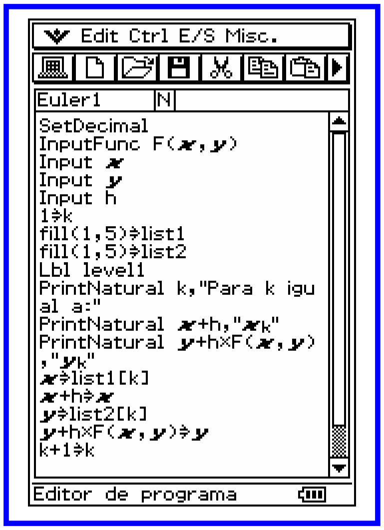




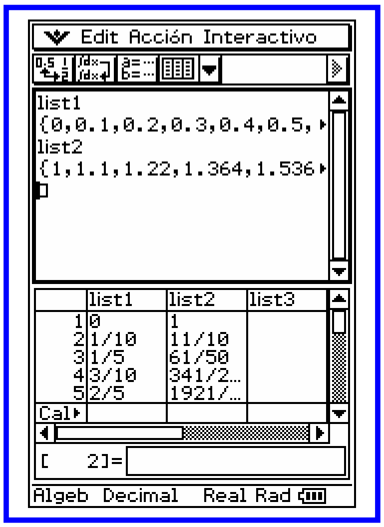


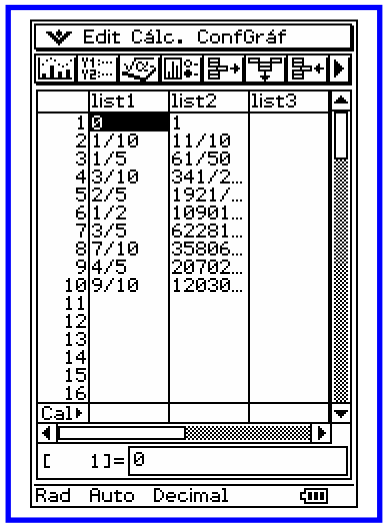
En la figura se muestra el primer valor de y_k, usando el programa Euler1.

Estos valores pueden ser ingresados en **list1** y **list2**, como se muestra en el programa de Euler1 modificado, siguiente:



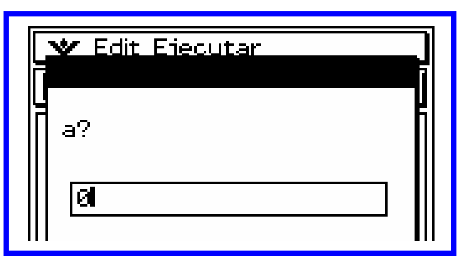
Una vez ingresados los valores en las listas 1 y 2, se pueden ver y trabajar con ellas en el programa de Estadísticas o desde el programa Principal.
En los gráficos siguientes, pueden verse estas dos alternativas.

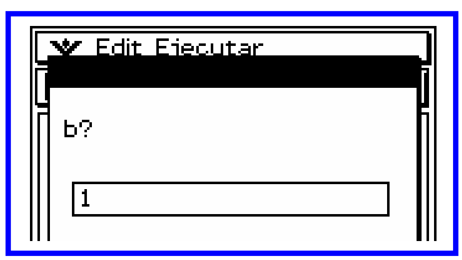


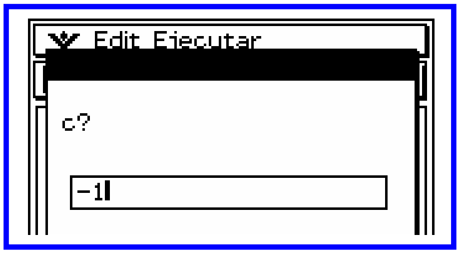


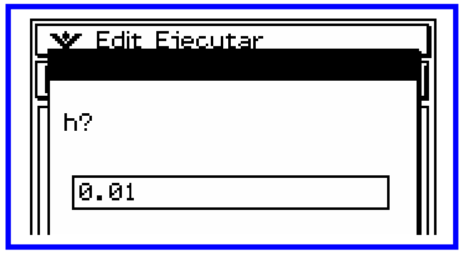
Gráfica de la solución aproximada.

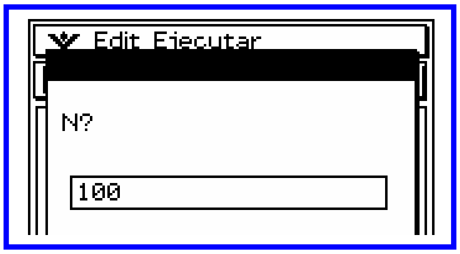
Ingresando los datos en el programa DibEul1, se tiene la gráfica de la solución aproximada:

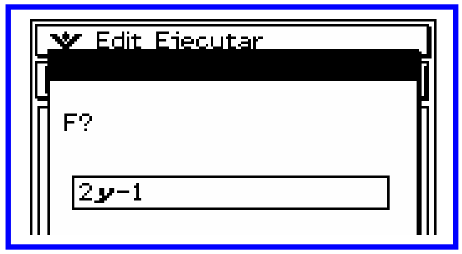


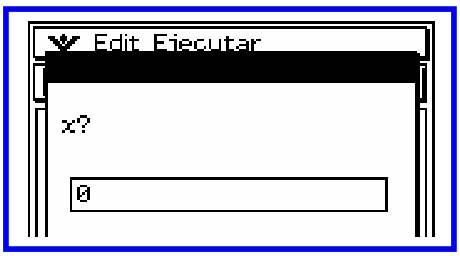


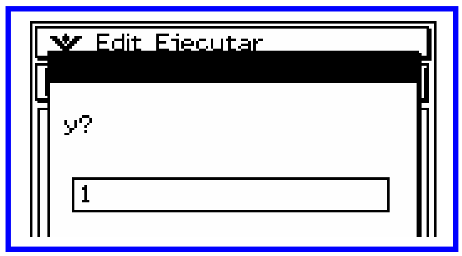












La gráfica de la curva solución se muestra en la figura adjunta.

Actividad 2: Dibuje el campo de pendientes de la ecuación de la actividad 1, usando la ventana de visualización $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 5$.

Solución: Usando n = m = 10, se obtiene:

Actividad 3:

Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 2x + y + 2}{xy - 2x - y + 2}$, $\quad y(0) = -1$.

Solución:

Factorizando: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x+1)(y+2)}{(x-1)(y-2)}$

Separando variables: $\dfrac{(x+1)dx}{(x-1)} - \dfrac{(y-2)dy}{(y+2)} = 0$.

Integrando: $\displaystyle\int \left(1 + \frac{2}{(x-1)}\right)dx - \int \left(1 - \frac{4}{(y+2)}\right)dy = c$

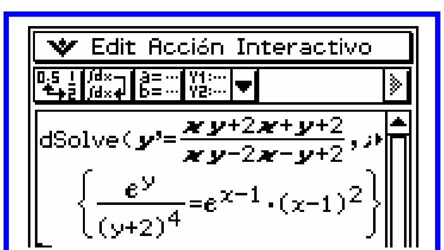
Luego: $x + 2\ln|x-1| - y + 4\ln|y+2| = c$

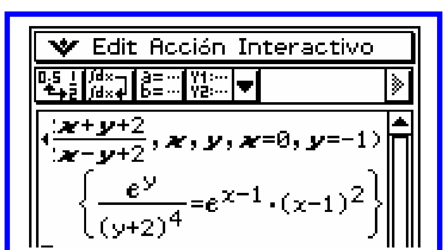
Como: $y(0) = -1$, tenemos que: $\quad c = 1$.

Luego, la solución única de la ecuación diferencial dada, es:

$$x + 2\ln|x-1| - y + 4\ln|y+2| = 1.$$

La solución, usando la calculadora, es:





Verifique que corresponde a la solución dada anteriormente.

Actividad 4:

Identifique el tipo de la ecuación diferencial y resuelva: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

Verifique, usando calculadora.

Solución:

La ecuación diferencial se puede escribir en la forma: $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$ (*)

Esta ecuación diferencial es del tipo coeficientes homogéneos con coeficientes $M(x,y)=x^2+y^2$ y $N(x,y)=-xy$, funciones homogéneas de igual grado (2) pues:

$M(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2M(x,y)$ y $N(tx,ty)=-(tx)(ty)=t^2N(x,y)$.

Por lo tanto considerando en (*) la sustitución: $y=vx$, entonces $dy=xdv+vdx$ tenemos que:

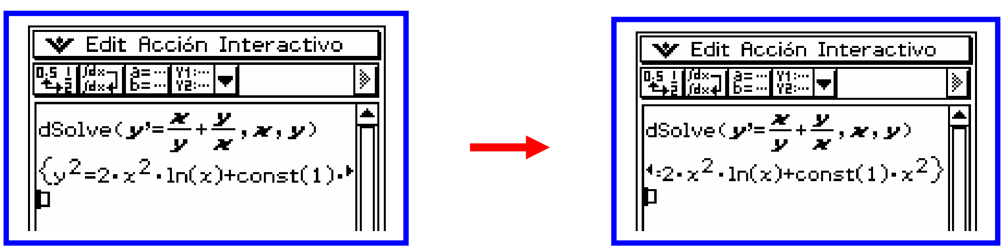
$(x^2+(vx)^2)dx - x(vx)(xdv+vdx)=0$.

Dividiendo por x^2 y separando variables tenemos: $\dfrac{dx}{x}-vdv=0$.

Integrando concluimos que: $\ln|x|-\dfrac{v^2}{2}=c$, lo que nos lleva a la solución:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2\ln|x|+c.$$

La solución, usando la calculadora, es:



Verifique que corresponde a la solución dada.

ACTIVIDADES A DESARROLLAR POR EL ALUMNO

En los ejercicios 1 y 7, use el método de Euler, con el tamaño del paso dado h para aproximar la solución al problema de valor inicial, en el intervalo especificado. Su respuesta debe incluir una tabla de valores aproximados de la variable dependiente. Incluya, también, un croquis de la gráfica de la solución aproximada.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2y + 1$, $y(0) = 3$, $0 \le x \le 2$, $h = 0.5$
2. $\dfrac{dy}{dt} = t - y^2$, $y(0) = 1$, $0 \le t \le 1$, $h = 0.25$
3. $\dfrac{dy}{dt} = seny$, $y(0) = 1$, $0 \le t \le 3$, $h = 0.5$
4. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1)$, $w(0) = 4$, $0 \le t \le 5$, $h = 1$
5. $\dfrac{dw}{dt} = (3 - w)(w + 1)$, $w(0) = 0$, $0 \le t \le 5$, $h = 0.5$
6. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}$, $y(0) = 2$, $0 \le t \le 2$, $h = 0.5$.
7. $\dfrac{dy}{dt} = e^{2/y}$, $y(1) = 2$, $1 \le t \le 3$, $h = 0.5$.
8. Compare sus respuestas a los ejercicios 6 y 7 y dé sus observaciones.
9. Compare sus respuestas a los ejercicios 4 y 5. ¿Está funcionando bien el método de Euler en este caso?¿Qué haría usted para evitar las dificultades que pueden surgir?
10. Considere el polinomio $p(y) = -y^3 - 2y + 2$. Empleando la tecnología apropiada, (a) esboce el campo de direcciones para $\dfrac{dy}{dt} = p(y)$, (b) dibuje las gráficas de algunas de las soluciones usando el campo de direcciones, (c) describa la relación entre las raíces de $p(y)$ y las soluciones de la ecuación diferencial, y (d) con el método de Euler, aproxime la o las raíces reales de $p(y)$ con tres lugares decimales.