A R T I C U L O .

Algunas tareas con polinomios de Legendre.

Tarea 1: Construya una función de usuario para calcular los polinomios de Legendre de cualquier orden n.

Solución

Para calcular los polinomios de Legendre usamos la "fórmula de Rodrigues"

$$\text{Define library\textbackslash Legendre(n)=expand}\left(\frac{1}{2^{n}n!}\times\text{diff}\left(\left(x^{2}-1\right)^{n},x,n\right)\right)$$

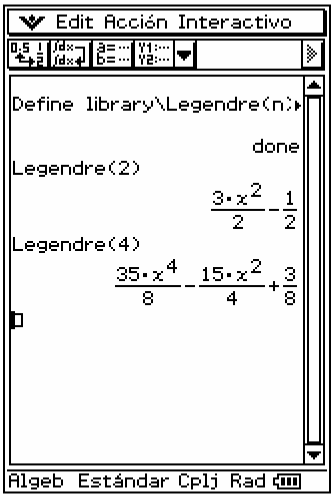

Figura 1

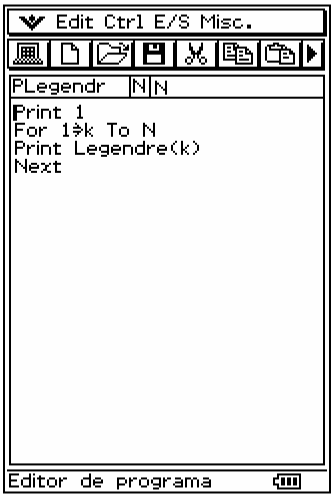

Figura 2

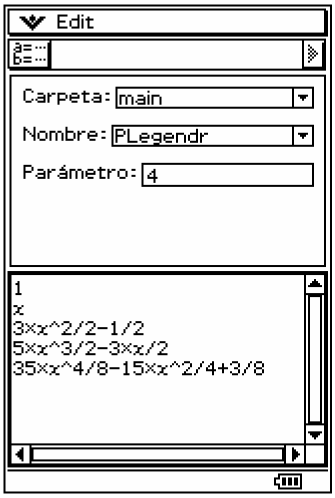

Figura 3

Tarea 2: Consideremos el espacio vectorial de polinomios $\boldsymbol{P}_{[-1,1]}(x)$ en el intervalo $x\in[-1,1]$ con el producto interior $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)\cdot g(x)dx$. Investigue con ayuda de la calculadora la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

a. Compruebe que si $P_n(x)$ es un polinomio de Legendre de orden n, entonces se cumple $(P_n,P_n)=\|P_n\|^2=\dfrac{2}{2n+1}$.

Solución

Primeramente construimos una función de usuario que permita calcular el producto interior de vectores en el espacio $\boldsymbol{P}_{[-1,1]}(x)$

$$\text{Define library\textbackslash Pint(a,b)=}\int_{-1}^{1}(a\times b,x,-1,1)$$

En la figura 4 se muestran varios cálculos que sugieren la ortogonalidad de los polinomios de Legendre.

a. La figura 5 muestra los cálculos para $(P_n, P_n) = \|P_n\|^2$. Observe que los resultados indican que siempre se obtiene una fracción con un 2 en el numerador y un número impar en el denominador. Es fácil notar que los números impares que aparecen en el denominador se obtienen tomando $2n+1$, donde n es el orden del polinomio. Es decir, los cálculos sugieren que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$

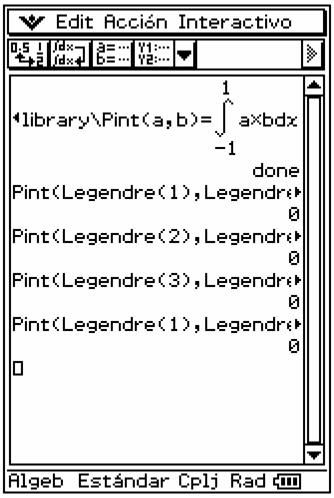

Figura 4

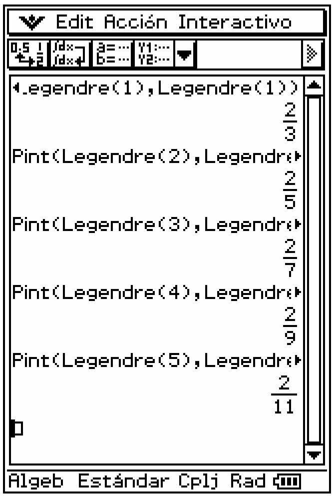

Figura 5

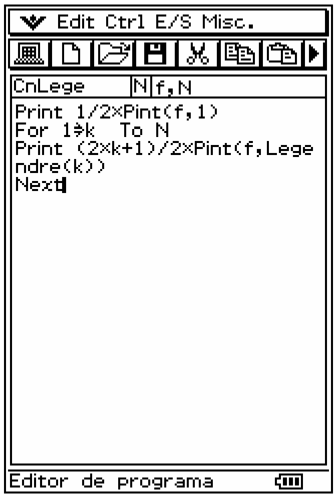

Figura 6

Tarea 3: Considere el subespacio de los polinomios con grado menor o igual que 4 en el intervalo $x \in [-1,1]$. Los polinomios de Legendre hasta orden cuatro forman una base de este subespacio. Exprese el polinomio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$ como una combinación lineal de estos polinomios de Legendre.

Solución

El polinomio $f(x)$ se expresa como combinación lineal de los polinomios de Legendre hasta orden cuatro mediante la relación $f(x) = \sum_{n=1}^{4} c_n P_n(x)$. Teniendo en cuenta la ortogonalidad de los polinomios de Legendre los coeficientes c_n se calculan mediante $c_n = \dfrac{(f, P_n)}{\|P_n\|^2} = \dfrac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx$, para $n = 1,2,3,4$. Las figuras 6-8 muestran los cálculos realizados con ayuda del programa “CnLege”. La función $f(x)$ se expresa entonces en la forma:

$f(x) = -\dfrac{32}{15}P_0(x) + \dfrac{1}{5}P_1(x) + \dfrac{40}{21}P_2(x) + \dfrac{4}{5}P_3(x) + \dfrac{8}{35}P_4(x)$ Podemos comprobar que el resultado es correcto escribiendo:

```
simplify(-
32/15+1/5×Legendre(1)+40/21×Legendre(2)+4/5×Legendre(3)+8/35×Legendre(4))
```

Figura 7

Figura 8

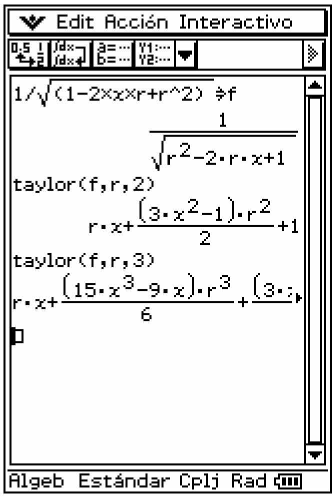

Figura 9

Tarea 4: Otra manera de generar los polinomios de Legendre es usando las función generatriz $G(x,r)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}}$, que se desarrolla en una serie de potencias de r, con la condición de que r y x se eligen de modo que la serie sea convergente. Con ayuda de la calculadora encuentre la serie de Taylor de la función $G(x,r)$ (considere 3 términos de la serie) y compruebe que los coeficientes de r^n coinciden con los polinomios de Legendre $P_n(x)$.

Solución

La figura 9 muestra las series de Taylor con dos y tres términos. Comparando con la figura 3 vemos que los coeficientes de las potencias de r son exactamente los polinomios de Legendre.