ARTICULO.

Un algoritmo para el cálculo del número π. Implementación con calculadora ClassPad 300 y Maple.

Procedimiento

Con ayuda del conocido límite $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1$ es posible generar un procedimiento básico para determinar el valor de π. Junto a este límite vamos a emplear además las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\;; \qquad (0.1)$$
$$\cos\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}\;. \qquad (0.2)$$

Tomando $x=\frac{\pi}{3}$ tenemos $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ e introduciendo la notación:

$$x_i=\cos\left(\frac{\pi}{3\,2^i}\right)\;;\quad y_i=\sin\left(\frac{\pi}{3\,2^i}\right);\quad x_0=\frac{1}{2}\,. \qquad (0.3)$$

Podemos construir las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_0&=\frac{1}{2}\\ y_{i+1}&=\sqrt{\frac{1-x_i}{2}}\\ x_{i+1}&=\sqrt{\frac{1+x_i}{2}}\,. \end{aligned} \qquad (0.4)$$

Para calcular el valor de π rescribimos el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ de la siguiente forma

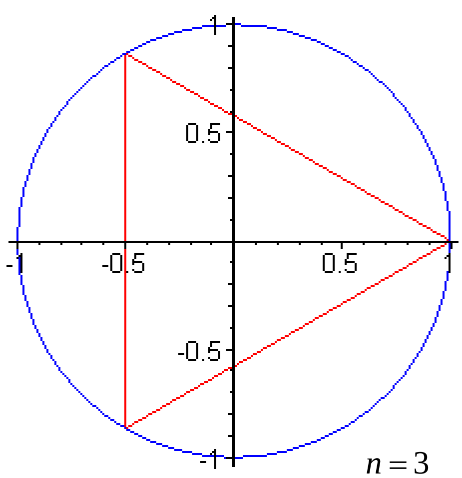
$$\lim_{i\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3\,2^i}\right)}{\frac{\pi}{3\,2^i}}=1\,. \qquad (0.5)$$

Este límite así escrito nos indica que $3\,2^i\sin\left(\frac{\pi}{3\,2^i}\right)$ tiende a π cuando i tiende a ∞. De acuerdo a la notación introducida en (1.3), el valor de π se puede calcular mediante la expresión $3\,2^i\,y_i$, tomando para ello un número suficientemente grande de i. En la siguiente tabla se escriben los valores obtenidos, después de repetir el cálculo 10 veces con ayuda de un programa simple hecho en Maple. Para evitar los errores de redondeo durante el cálculo tomamos un número suficientemente grande de dígitos.

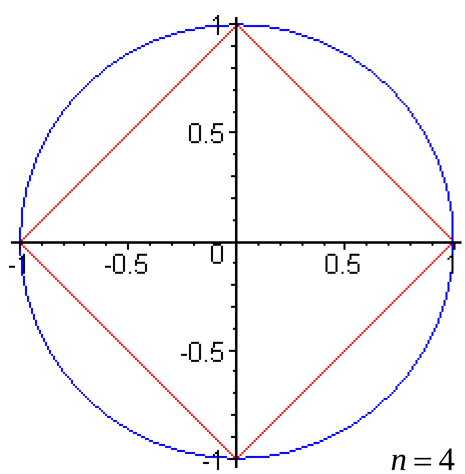
"Iteraciones"	"Valor de Pi"
1	3.0000000000000000000
2	3.1058285412302491482
3	3.1326286132812381966
4	3.1393502030468672043
5	3.1410319508905096368
6	3.1414524722854620456
7	3.1415576079118574430
8	3.1415838921483182961
9	3.1415904632280477600
10	3.1415921059992727998

Tabla 1

Este procedimiento posee una interpretación geométrica simple. Se basa en la idea de que la longitud (perímetro) del polígono inscrito en un círculo de radio uno tiende a la longitud del círculo 2π cuando el número de lados del polígono tiende la infinito. La siguientes figuras, elaboradas con Maple nos ofrecen una idea de este proceso.



(a)



(b)

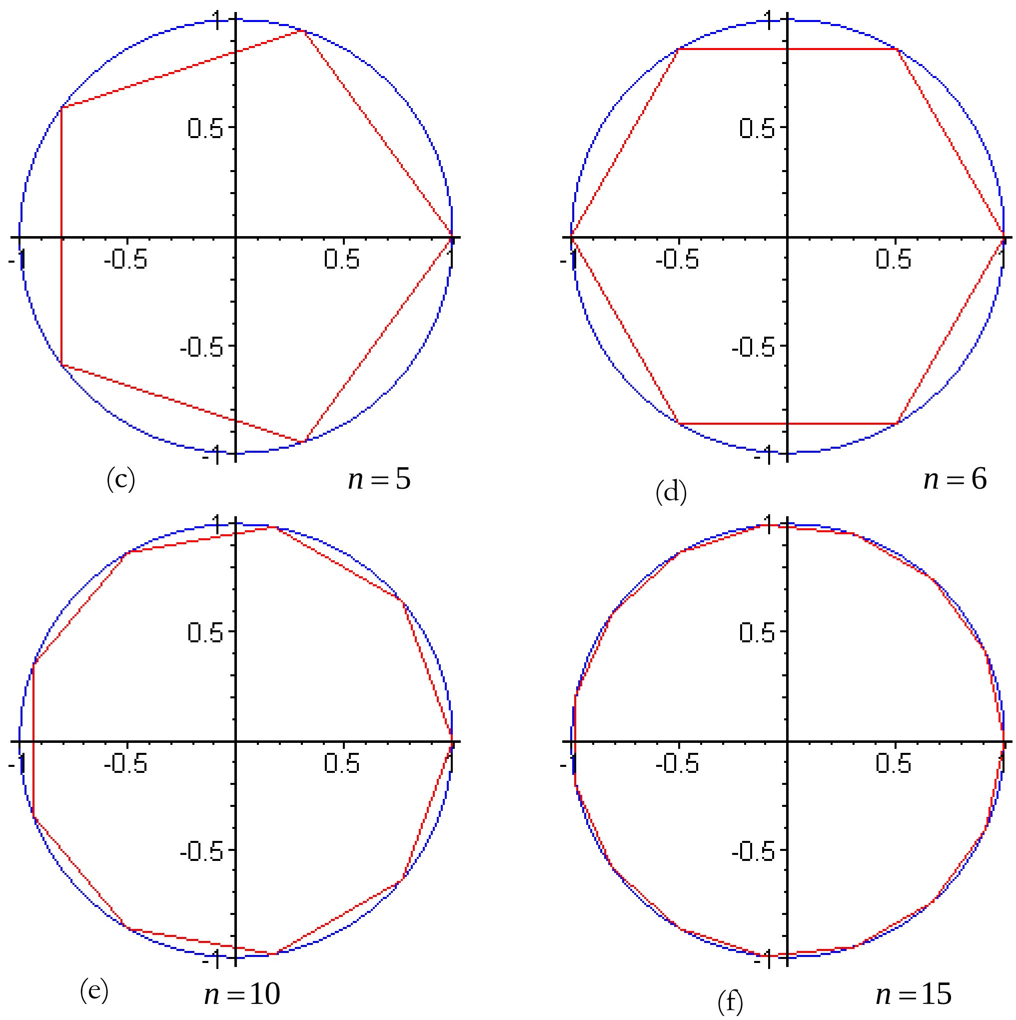


Figura 1.

Si tomamos la longitud de uno de los lados inscritos del polígono, como se indica en la figura 2, tenemos:

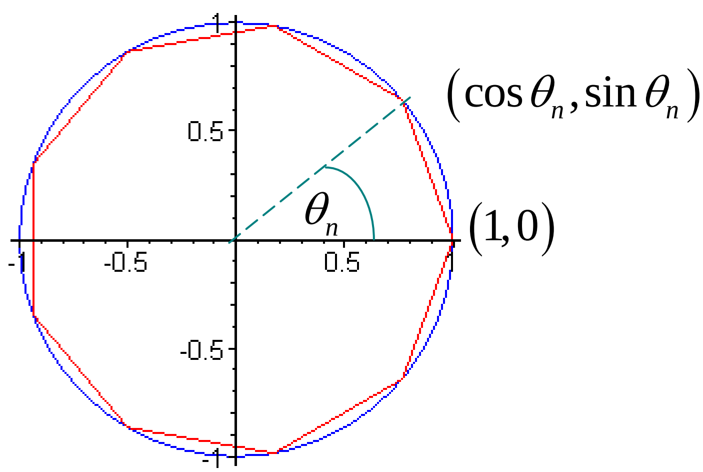


Figura 2.

$$d_n = \sqrt{(\cos\theta_n - 1)^2 + \sin^2\theta_n} = \sqrt{2(1-\cos\theta_n)} = 2\sin\frac{\theta_n}{2} \qquad (0.6)$$

Para n muy grandes se cumple que n veces el lado d_n es aproximadamente igual a la longitud de la circunferencia $nd_n \approx 2\pi \Rightarrow n\cdot 2\sin\frac{\theta_n}{2} \approx 2\pi$. Y por tanto tenemos la relación:

$$n\cdot\sin\frac{\theta_n}{2} \approx \pi \qquad (0.7)$$

Al dividir la circunferencia en $3\cdot 2^i$ partes tenemos que $\theta_n = \frac{2\pi}{3\cdot 2^i}$. Reemplazando en la relación (1.7), obtenemos:

$$3\cdot 2^i \cdot \sin\frac{2\pi}{2\cdot 3\cdot 2^i} \approx \pi \qquad (0.8)$$

Simplificando nos queda $3\cdot 2^i \cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^i} \approx \pi$, que es en esencia la relación que empleamos para completar la tabla 1.

Implementación con la calculadora ClassPad 300.

Con ayuda de la calculadora podemos implementar este algoritmo construyendo el programa ilustrado en la figura 3.

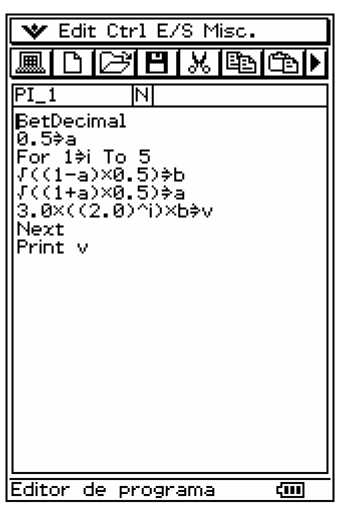


Figura 3.

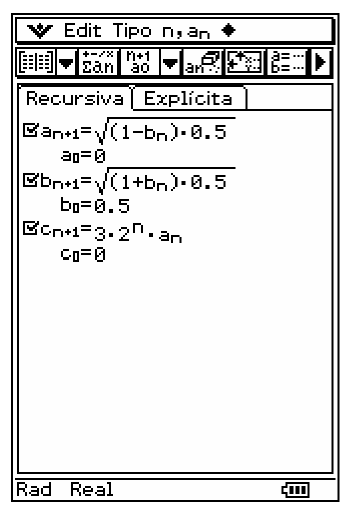


Figura 4.

Sin embargo, una manera aún más efectiva se logra empleando las secuencias ilustradas en la figura 4. Los resultados obtenidos con este último procedimiento se muestran en la figura 5.

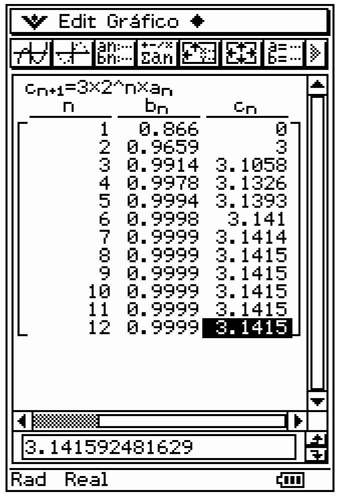


Figura 5.